Exercice 1 : Étude d'une fonction irrationnelle

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$.

1. **Ensemble de définition :**

   La fonction racine carrée $\sqrt{u}$ est définie si et seulement si $u \geq 0$. De plus, le dénominateur ne doit pas s'annuler. On doit donc résoudre l'inéquation $\dfrac{x-1}{x+3} \geq 0$ avec la contrainte $x \neq -3$.

   Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x+3}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

   On en déduit l'ensemble de définition :

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-3[\cup[1\,;+\infty[}$$

2. **Calcul de la dérivée :**

   La fonction f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$. On sait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

   Calculons d'abord $u'(x)$ en posant $u = \dfrac{v}{w}$ avec $v(x) = x-1$ et $w(x) = x+3$.

$$u'(x) = \frac{v'w - vw'}{w^2} = \frac{1(x+3) - 1(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}} \times \frac{4}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}}$$

   Or, on sait que $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{A}{B}}} = \sqrt{\dfrac{B}{A}}$. On obtient donc :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}}$$

3. **Tableau de variation :**

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{1\}$, $(x+3)^2 > 0$ et la racine carrée est strictement positive. Par conséquent, $f'(x) > 0$. La fonction est strictement croissante sur chacun de ses intervalles de définition.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖		‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↘	$f(1)=0$	↗	

Note : Les limites aux bornes n'étaient pas demandées.

4. **Équation de la tangente au point d'abscisse -4 :**

   La formule de la tangente au point d'abscisse $a=-4$ est :

$$y = f'(-4)(x-(-4)) + f(-4)$$

   Calculons les images :

   - $f(-4) = \sqrt{\dfrac{-4-1}{-4+3}} = \sqrt{\dfrac{-5}{-1}} = \sqrt{5}.$
   - $f'(-4) = \dfrac{2}{(-4+3)^2}\sqrt{\dfrac{-4+3}{-4-1}} = \dfrac{2}{1}\sqrt{\dfrac{-1}{-5}} = 2\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

   L'équation réduite est donc :

$$y = \frac{2\sqrt{5}}{5}(x+4) + \sqrt{5} \iff y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{8\sqrt{5}}{5} + \frac{5\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{13\sqrt{5}}{5}}$$

5. **Tangente passant par l'origine et recherche de a :**

   - **Graphiquement :** On trace une règle passant par l'origine $(0\,;\,0)$ et tangente à la courbe. Cela semble toucher la courbe sur la partie droite ($x>1$). On lit une abscisse approximative comprise entre $1,5$ et 2. Disons $a \approx 1,7$.
   - **Bonus - Calcul exact :** La tangente en a a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. Elle passe par l'origine $(0\,;\,0)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} 0 &= f'(a)(0-a) + f(a) \\ af'(a) &= f(a) \\ a\left[\frac{2}{(a+3)^2}\sqrt{\frac{a+3}{a-1}}\right] &= \sqrt{\frac{a-1}{a+3}} \end{aligned}$$

Puisque $f(a) > 0$ (pour $a > 1$), on peut diviser par $\sqrt{\frac{a-1}{a+3}}$ (ou multiplier par l'inverse) :

$$\frac{2a}{(a+3)^2} \times \frac{a+3}{a-1} = 1$$

$$\frac{2a}{(a+3)(a-1)} = 1$$

$$2a = (a+3)(a-1)$$

$$2a = a^2 + 2a - 3 \iff a^2 - 3 = 0$$

Les solutions sont $a = \sqrt{3}$ et $a = -\sqrt{3}$. Or, $-\sqrt{3} \approx -1,73$ n'appartient pas au domaine de définition. Seul $\sqrt{3} \in [1\,;+\infty[$.

La valeur exacte est donc :

$$\boxed{a = \sqrt{3}}$$

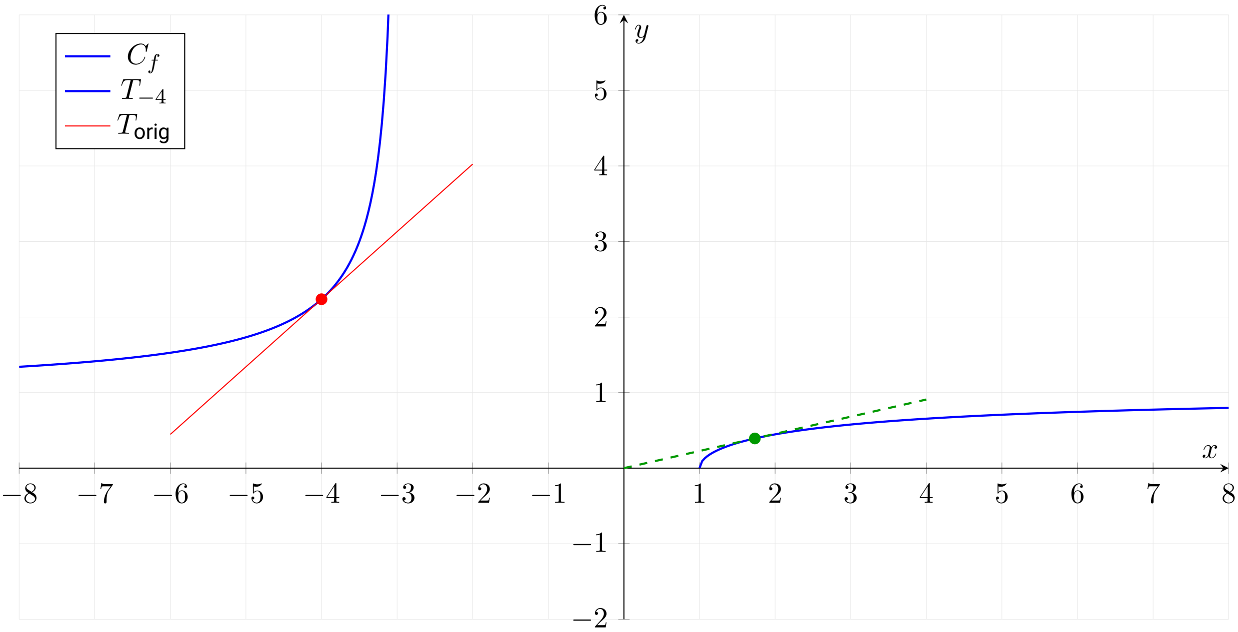

FIGURE 1 – Représentation graphique avec tangentes

Exercice 2 : Calculs de limites et dérivées

1. **Calcul de limites :**

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x + 1}{3x^3 + x^2 - 6}$
   Il s'agit d'une forme indéterminée type $\frac{\infty}{\infty}$. En l'infini, une fonction rationnelle a la même limite que le rapport des termes de plus haut degré :

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3x} = 0$$

   Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

   b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x + 2}$

   - Limite du numérateur : $3(-2)^2 + 4(-2) - 7 = 12 - 8 - 7 = -3$.
   - Limite du dénominateur : $\lim_{x \to -2}(x + 2) = 0$.
   - Signe du dénominateur : Si $x < -2$, alors $x + 2 < 0$. Le dénominateur tend vers 0^-.

   Par quotient $\dfrac{-3}{0^-}$, on applique la règle des signes ($- \div - = +$). Donc : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty}$

   c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x}}$
   On factorise ou on sépare la fraction pour lever l'indétermination $\frac{\infty}{\infty}$:

   $$\frac{2x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

   Or, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2. **Calcul de dérivées :**

   a) $f(x) = xe^{3x+1}$
   C'est un produit $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{3x+1}$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 3e^{3x+1}$ (dérivée de e^w est $w'e^w$).

   $$f'(x) = 1 \cdot e^{3x+1} + x \cdot 3e^{3x+1} = e^{3x+1}(1 + 3x)$$

   $$\boxed{f'(x) = (3x + 1)e^{3x+1}}$$

b) $g(x) = (\sqrt{x} - 2)^4$

C'est une composée de la forme u^n avec $u(x) = \sqrt{x} - 2$ et $n = 4$. La dérivée est $nu'u^{n-1}$.
$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$g'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x} - 2)^3 = \frac{2}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2)^3$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{2(\sqrt{x} - 2)^3}{\sqrt{x}}}$$

3. **Asymptotes (lecture de tableau) :**

- **En** -2 **:** On observe que $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$. Cela signifie que la droite d'équation $\boxed{x = -2}$ est une **asymptote verticale** à la courbe C_f.
- **En** $+\infty$ **:** On observe que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -5$. Cela signifie que la droite d'équation $\boxed{y = -5}$ est une **asymptote horizontale** à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.