Exercice 1 (4 points)

Partie A

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{RO}$ en décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles, en fonction des vecteurs portés par les arêtes du pavé droit ($\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CV}$ et $\overrightarrow{CE}$).

- Décomposition de $\overrightarrow{CN}$:
$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{ON}$$
Or, dans le rectangle $CONE$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CE}$. Donc :
$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CE}$$

- Décomposition de $\overrightarrow{RO}$:
$$\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{RV} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{CO}$$
Or, $\overrightarrow{RV} = -\overrightarrow{CE}$ (hauteur descendante) et $\overrightarrow{VC} = -\overrightarrow{CV}$ (profondeur vers l'avant). Donc :
$$\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CV} - \overrightarrow{CE}$$

Calculons maintenant le produit scalaire :

$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{RO} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CE}) \cdot (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CV} - \overrightarrow{CE})$$

En développant :

$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{RO} = \underbrace{\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CO}}_{CO^2} - \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CV} - \underbrace{\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CE}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CO}}_{0} - \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CV} - \underbrace{\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CE}}_{CE^2}$$

Le pavé étant droit, les vecteurs portés par les arêtes incidentes en C sont orthogonaux deux à deux. Ainsi, tous les produits scalaires croisés ($\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CV}$, etc.) sont nuls.

Il ne reste que :
$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{RO} = CO^2 - CE^2$$

Application numérique avec $CO = 5$ et $CE = 4$:

$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{RO} = 5^2 - 4^2 = 25 - 16$$

$$\boxed{\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{RO} = 9}$$

Partie B

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a. Toutes les faces sont des triangles équilatéraux de côté a. J est le milieu de $[BC]$.

Utilisons la relation de Chasles et les propriétés géométriques du tétraèdre régulier. Dans le triangle ABC équilatéral, la médiane (AJ) est aussi hauteur, donc $(AJ) \perp (BC)$. De même dans le triangle DBC, $(DJ) \perp (BC)$.

Pour calculer $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD}$, on peut utiliser la formule d'Al-Kashi (théorème de la médiane généralisé) dans le triangle AJD. On sait que :

$$AD^2 = JA^2 + JD^2 - 2\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD}$$

Donc :

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD} = \frac{1}{2}\left(JA^2 + JD^2 - AD^2\right)$$

Or, $[JA]$ est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a. Sa longueur est $JA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. De même, $JD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Enfin, $AD = a$ (arête du tétraèdre).

Remplaçons :

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2\right)$$

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD} = \frac{1}{2}\left(\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2\right)$$

$$\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD} = \frac{1}{2}\left(\frac{6a^2}{4} - \frac{4a^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2a^2}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JD} = \frac{a^2}{4}}$$

Exercice 2 (6 points)

1. (a) D'après la règle du parallélogramme (ou relation de Chasles vectorielle) dans le carré $ACGE$ (section diagonale du cube), ou plus simplement en utilisant les arêtes : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

$$\boxed{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}}$$

(b) Calculons $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{BD}$. Par distributivité :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$$

- $ABCD$ est un carré, donc ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Ainsi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
- L'arête $[AE]$ est orthogonale au plan de base (ABC), donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à (BD). Ainsi $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

On en déduit : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$.

(c) On sait que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, donc $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$, donc $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires ($\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$) du plan (BDE). Par propriété, si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, elle est orthogonale à ce plan.

$$\boxed{\text{La droite } (AG) \text{ est orthogonale au plan } (BDE).}$$

2. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des sommets sont : $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$ et $G(1;1;1)$.

   (a) Le plan (BDE) a pour équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$.

   D'après la question 1.c, $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ est un vecteur normal au plan (BDE).

   L'équation est donc de la forme :

$$1x+1y+1z+d=0 \iff x+y+z+d=0$$

   Le point $B(1;0;0)$ appartient au plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$1+0+0+d=0 \iff d=-1$$

   . Une équation cartésienne est donc :

$$\boxed{x+y+z-1=0}$$

   (b) La droite (AG) passe par $A(0;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$.

   Une représentation paramétrique de (AG) est :

$$\begin{cases} x=t \\ y=t\,, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

   Le point K intersection de (AG) et (BDE) vérifie les équations de la droite et du plan :

$$t+t+t-1=0 \iff 3t=1 \iff t=\frac{1}{3}$$

   On remplace t dans la représentation paramétrique : $x_K=\frac{1}{3}, y_K=\frac{1}{3}, z_K=\frac{1}{3}$.

$$\boxed{K\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)}$$

   (c) La pyramide $BDEG$ a pour base le triangle BDE et pour sommet G.

   La hauteur issue de G est la distance GK car K est le projeté orthogonal de G sur le plan (BDE) (puisque $(AG)\perp(BDE)$ et $K\in(AG)$).

   Calculons la distance GK :

$$GK=\sqrt{(x_K-x_G)^2+(y_K-y_G)^2+(z_K-z_G)^2}$$

$$GK = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\times 3} = \sqrt{\frac{4}{9}\times 3} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Le volume est $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times$ Aire$(BDE) \times$ Hauteur.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathcal{V}_{BDEG} = \frac{1}{3} \text{ unité de volume}}$$

Exercice 3 (10 points)

1. (a) Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\0-(-1)\\-3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-2\\6-(-1)\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$$

Calculons leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-1)\times 4 + 1\times 7 + (-3)\times 1 = -4+7-3 = 0$$

Le produit scalaire est nul, les vecteurs sont orthogonaux.

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A.}$$

(b) Calculons $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6-1\\6-0\\1-(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\times 5 + (-1)\times 6 + 3\times 4 = 5-6+12 = 11$$

Calculons les longueurs : $BA = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$. $BC = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{25+36+16} = \sqrt{77}$.

$$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 11, \quad BA = \sqrt{11}, \quad BC = \sqrt{77}}$$

(c) On utilise la définition géométrique du produit scalaire : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$.

$$11 = \sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos(\widehat{ABC})$$

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{11}{\sqrt{11}\sqrt{77}} = \frac{11}{\sqrt{11}\sqrt{7}\sqrt{11}} = \frac{11}{11\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 67,79°$$

$$\boxed{\widehat{ABC} \approx 68°}$$

2. (a) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $2x - y - z + 4 = 0$. Un vecteur normal est $\vec{n}(2\,;\,-1\,;\,-1)$.

    Vérifions si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

    $$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(-1) + (-1)(1) + (-1)(-3) = -2 - 1 + 3 = 0$$
    $$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(4) + (-1)(7) + (-1)(1) = 8 - 7 - 1 = 0$$

    Le vecteur normal de $\mathscr{P}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC).

    Donc $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (ABC).

    Par conséquent, les plans sont parallèles.

   (b) Comme les plans sont parallèles, ils ont le même vecteur normal $\vec{n}(2\,;\,-1\,;\,-1)$.

    L'équation cartésienne de (ABC) est de la forme : $2x - y - z + d = 0$.

    Le point $A(2\,;\,-1\,;\,0)$ appartient au plan :

    $$2(2) - (-1) - 0 + d = 0 \iff 4 + 1 + d = 0 \iff d = -5$$

    $$\boxed{\text{Equation de } (ABC) : \quad 2x - y - z - 5 = 0}$$

   (c) La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (ABC), donc son vecteur directeur est le vecteur normal du plan, $\vec{n}(2\,;\,-1\,;\,-1)$. Elle passe par $E(1\,;\,2\,;\,4)$.

    $$\boxed{\mathscr{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - t \end{cases}}$$

   (d) H est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan (ABC). On injecte les coordonnées paramétriques de $\mathscr{D}$ dans l'équation de (ABC) :

    $$2(1 + 2t) - (2 - t) - (4 - t) - 5 = 0$$
    $$2 + 4t - 2 + t - 4 + t - 5 = 0$$
    $$6t - 9 = 0$$
    $$6t = 9$$
    $$t = \frac{3}{2} = 1,5$$

    On calcule les coordonnées de H en remplaçant t :

    $x_H = 1 + 2(1,5) = 4$;

$y_H = 2 - 1,5 = 0,5 = \dfrac{1}{2}$;

$z_H = 4 - 1,5 = 2,5 = \dfrac{5}{2}$.

$$\boxed{H\left(4\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)}$$

3. Le triangle ABC est rectangle en A. Son aire est $\mathscr{B} = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC$.

   On a calculé $AB = \sqrt{11}$.

   Calculons $AC = \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 49 + 1} = \sqrt{66}$.

$$\mathscr{B} = \frac{1}{2} \times \sqrt{11} \times \sqrt{66} = \frac{1}{2} \times \sqrt{11} \times \sqrt{6 \times 11} = \frac{11\sqrt{6}}{2}$$

   La hauteur de la pyramide est la distance EH, car H est le projeté orthogonal de E sur la base (ABC).

$$EH = \sqrt{(4-1)^2 + (0,5-2)^2 + (2,5-4)^2}$$

$$EH = \sqrt{3^2 + (-1,5)^2 + (-1,5)^2} = \sqrt{9 + 2,25 + 2,25} = \sqrt{13,5}$$

   On peut simplifier $\sqrt{13,5} = \sqrt{\dfrac{27}{2}} = \sqrt{\dfrac{54}{4}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

   Calcul du volume :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times EH = \frac{1}{3} \times \frac{11\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{33 \times 6}{4} = \frac{198}{12} = \frac{33}{2} = 16,5$$

$$\boxed{\text{Le volume de la pyramide } ABCE \text{ est de } 16,5 \text{ unités de volume.}}$$