

Exercice 1 – Correction

On nous donne :

$$E = \{a, e, i, o, u, y\} \quad \text{et} \quad F = \{x, y, z\}.$$

1. Combien d'éléments contient l'ensemble $E \times F$?

Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (p, q) où $p \in E$ et $q \in F$.

- L'ensemble E contient 6 éléments.
- L'ensemble F contient 3 éléments.

Ainsi, le nombre d'éléments dans $E \times F$ est :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) = 6 \times 3 = \boxed{18}.$$

2. Michel affirme que les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ n'ont aucun élément en commun. Michel a-t-il raison ou tort ?

Les éléments de $E \times F$ sont des couples (p, q) avec $p \in E, q \in F$.

Les éléments de $F \times E$ sont des couples (q, p) avec $q \in F, p \in E$.

Même si certains éléments sont communs à E et F (par exemple y), les couples (p, q) et (q, p) sont différents sauf si $p = q$.

Or, comme y appartient à la fois à E et F , le couple (y, y) appartient à la fois à $E \times F$ et à $F \times E$.

$$(y, y) \in E \times F \cap F \times E$$

Michel a donc tort : il existe au moins un élément commun.

3. Déterminer $\text{Card}(E \cup F)$

On cherche le nombre d'éléments dans l'union des deux ensembles, sans doublons.

- $E = \{a, e, i, o, u, y\}$
- $F = \{x, y, z\}$

L'union contient les lettres suivantes :

$$E \cup F = \{a, e, i, o, u, y, x, z\}$$

Il y a donc 8 éléments distincts dans cette union :

$$\text{Card}(E \cup F) = \boxed{8}$$

Exercice 2

1) Nombre de tirages de 8 cartes possibles

Pour choisir 8 cartes parmi 32 **sans tenir compte de l'ordre**, on utilise une combinaison. Le nombre de tirages possibles est :

$$\binom{32}{8} = \frac{32!}{8! 24!}$$

En valeur numérique, on obtient :

$$\binom{32}{8} = \boxed{10\,518\,300}$$

2) Nombre de tirages pour Karine et Myriam

- Karine pioche d'abord 8 cartes parmi les 32, ce qui peut se faire de $\binom{32}{8}$ façons.
- Il reste alors $32 - 8 = 24$ cartes. Myriam pioche à son tour 8 cartes parmi ces 24, ce qui donne $\binom{24}{8}$ façons.

Comme ces deux actions sont successives et indépendantes, on multiplie les deux résultats :

$$\binom{32}{8} \times \binom{24}{8}$$

Numériquement, nous avons :

$$\binom{24}{8} = 735\,471,$$

et par conséquent :

$$\binom{32}{8} \times \binom{24}{8} = 10\,518\,300 \times 735\,471 = 7\,735\,904\,619\,300.$$

3) Nombre de rangements possibles pour les 8 cartes de Karine

Une fois les 8 cartes de Karine déterminées, chacune est distincte. Pour les disposer dans la main, on tient compte de l'**ordre** de rangement : c'est le nombre de permutations de 8 objets.

Le nombre de rangements possibles est donc :

$$8! = \boxed{40\,320}$$

Exercice 3

1. Combien de façons a-t-on de jouer les 4 cordes l'une après l'autre ?

Chaque corde est différente, et on veut jouer les 4 dans un ordre précis. Il s'agit donc d'un problème de **permutations** de 4 éléments.

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \boxed{24}$$

Il y a **24 façons différentes** de jouer les 4 cordes.

2. Combien d'alignements peut-on réaliser en piochant 4 jetons sur 10 ?

On choisit 4 jetons parmi 10, et l'ordre est important. Il s'agit d'un arrangement (ou permutation partielle) de 10 éléments pris 4 par 4 :

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \boxed{5040}$$

Il y a donc **5040 alignements possibles**.

3. Résolution de l'équation $\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

On cherche les entiers naturels $n \geq 2$ tels que :

$$\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

On a :

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

On égalise :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

On peut simplifier les deux côtés par $n(n-1)$ (non nul pour $n \geq 2$) :

$$\frac{1}{2} = \frac{n+1}{6} \Rightarrow 3 = n+1 \Rightarrow \boxed{n=2}$$

La seule solution entière naturelle est $n = 2$.

4. Les mots ANAGRAMME et SPAGHETTI ont-ils autant d'anagrammes ?

— **ANAGRAMME** contient 9 lettres avec des répétitions :

- A apparaît 3 fois
- M apparaît 2 fois

Le nombre d'anagrammes est donné par la formule :

$$\frac{9!}{3! \times 2!} = \frac{362880}{6 \times 2} = \boxed{30240}$$

— **SPAGHETTI** contient aussi 9 lettres, avec une répétition :

- T apparaît 2 fois

Le nombre d'anagrammes est donc :

$$\frac{9!}{2!} = \frac{362880}{2} = \boxed{181440}$$

Conclusion : Michel a tort, les deux mots n'ont pas autant d'anagrammes.

Exercice 4

Partie A

1. Tirage avec remise (chaque boule est remise dans le sac)

a) Dans un tirage avec remise, on a 9 choix pour chaque boule.

Le nombre total de nombres à 3 chiffres est donc :

$$9 \times 9 \times 9 = \boxed{729}.$$

b) Pour qu'un nombre soit pair, le dernier chiffre doit être pair. Parmi les chiffres de 1 à 9, les chiffres pairs sont : 2, 4, 6, 8 (4 possibilités).

Pour les deux premières positions, il y a 9 choix chacune. Ainsi, on a :

$$9 \times 9 \times 4 = \boxed{324}.$$

c) On veut constituer un nombre pour lequel un seul chiffre est répété exactement deux fois, et le troisième est différent.

- Le chiffre qui sera répété peut être choisi de 9 manières.
- Le chiffre différent peut être choisi parmi les 8 restants.
- Les positions sont à déterminer : placer le chiffre différent parmi les 3 positions, ce qui se fait en $\binom{3}{1} = 3$ façons.

Le nombre total est donc :

$$9 \times 8 \times 3 = \boxed{216}.$$

2. Tirage sans remise (les boules tirées ne sont pas remises)

- a) Ici, on effectue un arrangement de 9 éléments pris 3 à la fois. Le nombre d'arrangements est donné par :

$$A(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = \boxed{504}.$$

- b) En retirant le chiffre 7, il reste 8 boules. Le nombre d'arrangements de 8 éléments pris 3 à la fois est :

$$A(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = \boxed{336}.$$

- c) On souhaite compter les nombres dont le dernier chiffre est 5 ou 8. Pour chaque cas (5 ou 8), le chiffre en position unité est fixé, et on choisit les deux premières positions parmi les autres chiffres, en respectant l'ordre.

Pour chaque cas, il y a :

$$8 \times 7 = 56 \text{ arrangements.}$$

Comme il y a 2 cas (5 ou 8), on obtient :

$$2 \times 56 = \boxed{112}.$$

3. Tirage simultané de 3 boules (l'ordre n'est pas pris en compte)

- a) Le nombre de tirages est le nombre de combinaisons de 9 éléments pris 3 à la fois :

$$\binom{9}{3} = \boxed{84}.$$

- b) Si l'on exclut les boules numérotées 3 et 6, il reste 7 boules. Le nombre de combinaisons est alors :

$$\binom{7}{3} = \boxed{35}.$$

- c) On souhaite un tirage qui contienne le numéro 2 et deux autres numéros impairs. Parmi 1 à 9, les numéros impairs sont 1, 3, 5, 7, 9 (soit 5 chiffres). Il faut choisir 2 parmi ces 5, ce qui donne :

$$\binom{5}{2} = \boxed{10}.$$

Partie B

On considère un sac contenant n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément deux boules. Le nombre de tirages possibles est :

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On cherche n tel que

$$\frac{n(n-1)}{2} = 903 \iff n(n-1) = 1806.$$

Il s'agit d'une équation du second degré que nous écrivons sous forme développée :

$$n^2 - n - 1806 = 0.$$

Pour résoudre cette équation, nous calculons le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1806) = 1 + 7224 = 7225.$$

Or, $\sqrt{7225} = 85$ (puisque $85^2 = 7225$). Les solutions sont donc données par :

$$n = \frac{1 \pm 85}{2}.$$

Nous avons :

$$n_1 = \frac{1+85}{2} = \frac{86}{2} = 43, \quad n_2 = \frac{1-85}{2} = \frac{-84}{2} = -42.$$

Comme n doit être un entier naturel strictement positif, on retient :

$$\boxed{n = 43}.$$