Exercice 1

Montrer par récurrence que $z_n = \dfrac{5+13\cdot 4^n}{3}$ si $z_0 = 6$ et $z_{n+1} = 4z_n - 5$.

Initialisation. Pour $n = 0$:

$$\frac{5+13\cdot 4^0}{3} = \frac{18}{3} = 6 = z_0.$$

Hérédité. Supposons qu'au rang k,

$$z_k = \frac{5+13\cdot 4^k}{3}.$$

Alors

$$z_{k+1} = 4z_k - 5 = 4\cdot\frac{5+13\cdot 4^k}{3} - 5 = \frac{20+52\cdot 4^k}{3} - \frac{15}{3} = \frac{5+52\cdot 4^k}{3} = \frac{5+13\cdot 4^{k+1}}{3}.$$

La propriété est vraie au rang $k+1$. Par récurrence,

$$\boxed{z_n = \frac{5+13\cdot 4^n}{3}}.$$

Exercice 2

On veut prouver, pour $n \geq 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (3k+1)^2 = \frac{n(6n^2+15n+11)}{2}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$:

$$T_1 = (3\cdot 1+1)^2 = 4^2 = 16, \qquad \frac{1(6+15+11)}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

Hérédité. Supposons qu'au rang $k \geq 1$:

$$T_k = \frac{k(6k^2+15k+11)}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= T_k + (3(k+1)+1)^2 = T_k + (3k+4)^2 \\
&= \frac{k(6k^2+15k+11)}{2} + \left(9k^2+24k+16\right) \\
&= \frac{k(6k^2+15k+11) + 2(9k^2+24k+16)}{2} \\
&= \frac{6k^3+15k^2+11k+18k^2+48k+32}{2} \\
&= \frac{6k^3+33k^2+59k+32}{2}.
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{(k+1)\big(6(k+1)^2+15(k+1)+11\big)}{2}=\frac{(k+1)(6k^2+27k+32)}{2}=\frac{6k^3+33k^2+59k+32}{2}.$$

Donc la formule est vraie au rang $k+1$. Par récurrence,

$$\boxed{T_n=\frac{n(6n^2+15n+11)}{2}}.$$

Exercice 3

Prouver par récurrence que $w_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+3$ si $w_0=3$ et $w_{n+1}=w_n+3n+4$.

Initialisation. $n=0$: $w_0=3$ et $\frac{3}{2}\cdot 0^2+\frac{5}{2}\cdot 0+3=3$.

Hérédité. Supposons $w_k=\frac{3}{2}k^2+\frac{5}{2}k+3$. Alors

$$\begin{aligned}
w_{k+1}&=w_k+3k+4\\
&=\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{5}{2}k+3\right)+3k+4\\
&=\frac{3}{2}k^2+\frac{11}{2}k+7\\
&=\frac{3}{2}(k+1)^2+\frac{5}{2}(k+1)+3.
\end{aligned}$$

Par récurrence,

$$\boxed{w_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+3}.$$

Exercice 4

Montrer $-2\le u_n\le -0{,}5$ si $u_0=-\sqrt{3}$ et $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n-1$.

Initialisation. $-2\le-\sqrt{3}\approx-1{,}732\le-0{,}5$.

Hérédité. La fonction $f(x)=\frac{1}{5}x-1$ est croissante. Or

$$f(-2)=-1{,}4,\qquad f(-0{,}5)=-1{,}1,$$

donc $f([-2,-0{,}5])=[-1{,}4,-1{,}1]\subset[-2,-0{,}5]$. Ainsi, si $-2\le u_k\le-0{,}5$ alors $-2\le u_{k+1}\le-0{,}5$. Par récurrence,

$$\boxed{-2\le u_n\le-0{,}5 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.}$$

Exercice 5

Soit (v_n) définie par $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\sqrt{v_n^2+1}}$ pour $n \geq 1$.

1) **Calcul de v_2 et v_3.**

$$v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad v_3 = \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

2) **Conjecture.** On observe $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1}}$, $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. On conjecture :

$$\boxed{v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{pour tout } n \geq 1.}$$

3) **Démonstration par récurrence.** *Initialisation :* au rang $n = 1$, $v_1 = 1 = \dfrac{1}{\sqrt{1}}$.

Hérédité : supposons qu'au rang $k \geq 1$, $v_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Alors

$$v_{k+1} = \frac{v_k}{\sqrt{v_k^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{\frac{1}{k}+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

La propriété est vraie au rang $k+1$. Par récurrence,

$$\boxed{v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ pour tout } n \geq 1.}$$