Exercice 1 — Suites arithmétique et géométrique

1. (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et $u_3 = 729$.

$$u_n = u_3\, q^{n-3} \quad \Rightarrow \quad u_7 = 729\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{729}{81} = \boxed{9}.$$

2. (v_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et $v_{10} = 8$.

$$v_{10} = v_1 + 9r \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_{10} - 9 \times 5 = 8 - 45 = \boxed{-37}.$$

Exercice 2 — Variations de la suite $w_n = 2n^2 - 7n$

On étudie les accroissements :

$$w_{n+1} - w_n = 2\big((n+1)^2 - n^2\big) - 7 = 4n - 5.$$

Ainsi $w_{n+1} - w_n < 0$ si $n < \frac{5}{4}$, $= 0$ si $n = \frac{5}{4}$ (valeur non entière), et > 0 si $n > \frac{5}{4}$. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \text{décroissante de } n = 0 \text{ vers } n = 2, \\ \text{croissante à partir de } n = 2. \end{cases}$$

Calculs utiles : $w_0 = 0$, $w_1 = -5$, $w_2 = -6$ (minimum atteint en $n = 2$), $w_3 = -3$.

$$\boxed{\text{La suite décroît jusqu'à } n = 2 \text{ puis croît pour } n \geq 2.}$$

n	0		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4n-5$		$-$	0	$+$	

Exercice 3 — Suite définie par récurrence : $u_0 = -4$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$

1. $u_1 = \frac{1}{2}(-4) + 6 = 4$, $u_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 + 6 = 8$.

$$\boxed{u_1 = 4 \quad ; \quad u_2 = 8}$$

2. Différences : $u_1 - u_0 = 8$, $u_2 - u_1 = 4 \Rightarrow$ pas arithmétique. Rapports : $\frac{u_1}{u_0} = -1$, $\frac{u_2}{u_1} = 2 \Rightarrow$ pas géométrique.

$$\boxed{\text{La suite n'est ni arithmétique ni géométrique.}}$$

Exercice 4 — Modèle bénévoles : $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 12$, $u_0 = 80$

1. $u_1 = 0{,}8 \times 80 + 12 = 76$.
2. $u_0 = \boxed{80}$. Relation : $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 12$.
3. Récurrence : $u_{n+1} - 60 = 0{,}8(u_n - 60) \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq 60$. Et $u_n - u_{n+1} = 0{,}2u_n - 12 \geq 0$ dès que $u_n \geq 60$. Donc $60 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
4. Posons $v_n = u_n - 60$. Alors $v_{n+1} = 0{,}8v_n$. (v_n) est géométrique de raison $0{,}8$, $v_0 = 20$.

$$v_n = 20(0{,}8)^n, \quad u_n = 60 + 20(0{,}8)^n.$$

Exercice 5 — Suite $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 4$, $u_0 = 12$

Objectif. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 12}.$$

On procède par **une seule récurrence** sur la propriété

$$P_n : \quad 3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 12.$$

Initialisation

Pour $n = 0$: $u_0 = 12$ et

$$u_1 = 4 + \sqrt{u_0} = 4 + \sqrt{12} \approx 7{,}46.$$

Alors

$$3 \leq u_1 \leq u_0 \leq 12,$$

donc P_0 est vraie.

Hérédité

Supposons P_n vraie pour un certain $n \geq 0$, c'est-à-dire

$$3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 12.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty)$, donc

$$\sqrt{3} \ \leq \ \sqrt{u_{n+1}} \ \leq \ \sqrt{u_n} \ \leq \ \sqrt{12}.$$

En ajoutant 4 membre à membre, on obtient

$$4+\sqrt{3} \;\le\; 4+\sqrt{u_{n+1}} = u_{n+2} \;\le\; 4+\sqrt{u_n} = u_{n+1} \;\le\; 4+\sqrt{12}.$$

Comme $4+\sqrt{3} \;>\; 3$ et $4+\sqrt{12} < 12$, on en déduit

$$3 \;\le\; u_{n+2} \;\le\; u_{n+1} \;\le\; 12,$$

c'est-à-dire P_{n+1} vraie.

Conclusion

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{3 \le u_{n+1} \le u_n \le 12}.$$

En particulier, (u_n) est **décroissante** et **bornée inférieurement** (par 3), donc **convergente**.