Exercice 1

1. **Affirmation 1 : Fausse.**

L'affirmation indique une condition sur l'indice n ($n \geq 35$) sans préciser de comportement sur les valeurs u_n. Le simple fait que la suite existe au-delà du rang 35 n'implique pas qu'elle diverge vers $-\infty$.

Contre-exemple : Soit la suite définie par $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 35$, la suite est bien définie, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \neq -\infty$.

2. **Affirmation 2 : Fausse.**

On est en présence d'une forme indéterminée du type ´$\infty \times 0$ˇ. Le résultat dépend des suites choisies.

Contre-exemple : Posons $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

– $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
– $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et $v_n > 0$.

Cependant, le produit $u_n v_n = n \times \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \boxed{0}$. La limite n'est donc pas $+\infty$.

3. **Affirmation 3 : Fausse.**

Étudions les variations de la fonction associée $f(x) = x^2 - 42x + 4$ sur $[0; +\infty[$. f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1 > 0$. Elle est donc décroissante puis croissante. Le sommet de la parabole a pour abscisse $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{42}{2} = 21$.

La suite (p_n) est donc strictement décroissante pour $0 \leq n \leq 21$, mais strictement croissante pour $n \geq 21$. Elle n'est donc pas strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Vérification numérique : $p_{21} = -437$ et $p_{22} = -436$. On a $p_{22} > p_{21}$.

4. **Affirmation 4 : Vraie.**

Pour tout entier naturel n, on a $n \geq 0$. En multipliant par -3 (qui est négatif), l'inégalité change de sens :

$$n \geq 0 \iff -3n \leq 0$$

Ajoutons 4 de chaque côté :

$$-3n + 4 \leq 4 \iff w_n \leq \boxed{4}$$

La suite (w_n) est donc bien majorée par 4.

Exercice 2

1. **Démonstration par récurrence.**

Soit $P(n)$ la propriété : ´$u_n = 1 - 3^n$ˇ.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a d'une part $u_0 = 0$ (donné par l'énoncé) et d'autre part $1 - 3^0 = 1 - 1 = 0$. L'égalité est vérifiée, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier $k \in \mathbb{N}$ fixé, la propriété $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k = 1 - 3^k$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} = 1 - 3^{k+1}$.

On sait que $u_{k+1} = 3u_k - 2$. Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3(1 - 3^k) - 2 \\ &= 3 - 3 \times 3^k - 2 \\ &= 3 - 3^{k+1} - 2 \\ &= 1 - 3^{k+1} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{u_n = 1 - 3^n}$$

2. **Calcul de limites.**

a. $u_n = \dfrac{3 - \frac{1}{n^2}}{n+1}$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n^2}\right) = 3$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$.

Par quotient des limites :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \boxed{0}$$

b. $v_n = 3n^2 - 8n + 1$. C'est une forme indéterminée du type ´$\infty - \infty$ˇ. Factorisons par le terme de plus haut degré :

$$v_n = n^2 \left(3 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \dfrac{8}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 3$. Par produit des limites :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \boxed{+\infty}$$

c. $t_n = \left(n^2 - \dfrac{3}{n^2}\right)(6 - n)$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^2 - \dfrac{3}{n^2}\right) = +\infty$ (car $n^2 \to +\infty$ et $3/n^2 \to 0$).
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (6 - n) = -\infty$.

Par produit des limites (règle des signes) :

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = \boxed{-\infty}$$

Exercice 3

1. **Calcul des premiers termes et conjecture.**

En utilisant la formule $u_{n+1} = \dfrac{3 - u_n}{8 - 5u_n}$ avec $u_0 = 1$:

- $u_1 = \dfrac{3-1}{8-5(1)} = \dfrac{2}{3} \approx \boxed{0,667}$
- $u_2 = \dfrac{3 - \frac{2}{3}}{8 - 5(\frac{2}{3})} = \dfrac{\frac{9}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{24}{3} - \frac{10}{3}} = \dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{14}{3}} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2} = \boxed{0,500}$
- $u_3 = \dfrac{3 - 0,5}{8 - 5(0,5)} = \dfrac{2,5}{5,5} = \dfrac{25}{55} = \dfrac{5}{11} \approx \boxed{0,455}$

On constate que $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$. **Conjecture :** La suite (u_n) semble être **décroissante**.

2. **Étude de la fonction f.**

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{3-x}{8-5x}$. Elle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{1,6\}$.

Calcul de la dérivée : On pose $u(x) = 3 - x \implies u'(x) = -1$ et $v(x) = 8 - 5x \implies v'(x) = -5$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{-1(8-5x) - (3-x)(-5)}{(8-5x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8 + 5x + 15 - 5x}{(8-5x)^2} = \frac{7}{(8-5x)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,6\}$, $(8-5x)^2 > 0$ et $7 > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty; 1,6[$ et sur $]1,6; +\infty[$.

Calcul des limites aux bornes :

- **En l'infini :** On a une forme indéterminée. On factorise par le terme de plus haut degré (ou on utilise le rapport des coefficients dominants pour une fonction rationnelle) :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{-5x} = \frac{1}{5} = 0,2$$

  La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0,2$.

- **En 1,6 (valeur interdite) :** On étudie le signe du dénominateur $8 - 5x$.

$$8 - 5x = 0 \iff x = 1,6$$

  Si $x < 1,6$, alors $8 - 5x > 0$ (tend vers 0^+). Si $x > 1,6$, alors $8 - 5x < 0$ (tend vers 0^-). De plus, le numérateur tend vers $3 - 1,6 = 1,4 > 0$.

  Ainsi :

$$\lim_{x\to 1,6^-} f(x) = \frac{1,4}{0^+} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1,6^+} f(x) = \frac{1,4}{0^-} = -\infty$$

  La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1,6$.

Tableau de variations complet :

x	$-\infty$	1.6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
f	$\frac{1}{5} \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \frac{1}{5}$

3. **Démonstration par récurrence et convergence.**

Soit $P(n)$ la propriété : ´$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ˇ.

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{2}{3}$. On a bien $0 \leq \frac{2}{3} \leq 1 \leq 1$. La propriété est vraie.

Hérédité : Supposons que $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$ pour un entier k. Puisque la fonction f est **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; 1]$ (car $1 < 1,6$, donc on est bien sur l'intervalle où f est définie et continue), elle conserve l'ordre.

Appliquons f à l'inégalité :

$$f(0) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(1)$$

Calculons les bornes :

- $f(0) = \dfrac{3}{8} = 0,375 \geq 0$.
- $f(1) = \dfrac{2}{3} \leq 1$.
- Par définition, $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $f(u_k) = u_{k+1}$.

On obtient donc :

$$\frac{3}{8} \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq \frac{2}{3}$$

Ce qui implique a fortiori :

$$0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1$$

L'ordre $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ confirme la décroissance, et les bornes 0 et 1 sont conservées. La propriété est héréditaire.

Conclusion pour la suite : D'après la récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ et $u_n \geq 0$.

- La suite (u_n) est **décroissante**.
- La suite (u_n) est **minorée** par 0.

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est **convergente**.