

Correction

Exercice 1

Pour chaque affirmation, on précise Vrai/Faux et on justifie.

1. **Affirmation 1.** « Si (u_n) est une suite telle que $n \geq 35$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. »

Cette phrase est **incohérente** : la condition « $n \geq 35$ » porte sur l'indice (qui vaut de toute façon $n \rightarrow +\infty$) et non sur les valeurs de la suite. Aucune information sur u_n n'est fournie permettant de conclure à une limite $-\infty$.

Conclusion : Faux. (L'énoncé semble affecté par une coquille; la proposition telle quelle n'est pas valable.)

2. **Affirmation 2.** Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec $v_n > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

Faux. Contre-exemple : $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n}$ (avec $v_n > 0$). Alors $u_n v_n = 1$ pour tout n , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1 \neq +\infty$.

Conclusion : Faux.

3. **Affirmation 3.** La suite $p_n = n^2 - 42n + 4$ est strictement décroissante.

Calculons la différence :

$$p_{n+1} - p_n = ((n+1)^2 - 42(n+1) + 4) - (n^2 - 42n + 4) = 2n - 41.$$

On a $p_{n+1} - p_n < 0$ si $n \leq 20$ et > 0 si $n \geq 21$. La suite décroît donc jusqu'à $n = 20$ puis croît à partir de $n = 21$.

Conclusion : Faux (elle n'est pas strictement décroissante sur tout $\mathbb{N}$).

4. **Affirmation 4.** La suite $w_n = -3n + 4$ est majorée par 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq w_0 = 4$ et la suite est décroissante.

Conclusion : Vrai (majorée par 4).

Exercice 2

1. On considère (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

Démonstration par récurrence que $u_n = 1 - 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $1 - 3^0 = 1 - 1 = 0$: la formule est vraie.

Hérédité. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1 - 3^n$. Alors

$$u_{n+1} = 3u_n - 2 = 3(1 - 3^n) - 2 = 3 - 3^{n+1} - 2 = 1 - 3^{n+1}.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 3^n$.

Remarque sur la limite. Comme $3^n \rightarrow +\infty$, on a $u_n \rightarrow -\infty$.

2. Limites des suites suivantes.

a) On interprète (au vu de la mise en page)

$$u_n = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{n + 1}.$$

Alors $3 - \frac{1}{n^2} \rightarrow 3$ et $n + 1 \rightarrow +\infty$, donc par quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

b) **(Factorisation détaillée).** Pour $v_n = 3n^2 - 8n + 1$, on factorise par n^2 :

$$v_n = n^2 \left(3 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Or $n^2 \rightarrow +\infty$ et

$$3 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 > 0.$$

Plus précisément, pour $n \geq 3$,

$$3 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} > 0,$$

donc $v_n \geq \frac{1}{3} n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

c) $t_n = \left(\frac{n^2 - 3}{n^2} \right) (6 - n) = \left(1 - \frac{3}{n^2} \right) (6 - n)$. Or $1 - \frac{3}{n^2} \rightarrow 1$ et $6 - n \rightarrow -\infty$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty.$$

Exercice 3

On considère $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{3 - x}{8 - 5x}.$$

1. Calculs numériques et conjecture.

$$u_1 = f(1) = \frac{2}{3} \approx 0,667, \quad u_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} = 0,5, \quad u_3 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{11} \approx 0,455.$$

On conjecture que (u_n) est **décroissante** et **bornée inférieurement**.

2. Étude rapide de f . Le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{8}{5}\right\}$. On dérive :

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (8 - 5x) - (3 - x) \cdot (-5)}{(8 - 5x)^2} = \frac{7}{(8 - 5x)^2} > 0.$$

Ainsi f est **strictement croissante** sur chacun des intervalles de son domaine.

3. Méthode souhaitée : récurrence simple par composition. (i) Point fixe pertinent. L'équation $x = f(x)$ équivaut à $5x^2 - 9x + 3 = 0$, d'où

$$\alpha = \frac{9 - \sqrt{21}}{10} \approx 0,4417 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{9 + \sqrt{21}}{10} \approx 1,3583.$$

On retient le point fixe dans $[0, 1]$: $f(\alpha) = \alpha$.

(ii) Invariance de $[\alpha, 1]$ par récurrence en composant par f .

Initialisation. On a bien $\alpha \leq u_0 = 1 \leq 1$.

Hérédité. Supposons $\alpha \leq u_n \leq 1$. Comme f est **croissante**, on peut **composer** l'inégalité par f sans changer le sens :

$$f(\alpha) = \alpha \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(1) = \frac{2}{3} \leq 1.$$

Ainsi, par récurrence, $\alpha \leq u_n \leq 1$ pour tout n .

(iii) Décroissance de (u_n) par récurrence en composant par f .

Initialisation. $u_1 = \frac{2}{3} \leq 1 = u_0$.

Hérédité. Supposons $u_n \leq u_{n-1}$. Comme f est **croissante**, on compose par f sans changer le sens :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n-1}) = u_n.$$

Donc (u_n) est décroissante.

(iv) Convergence et limite. La suite (u_n) est décroissante et minorée par α , donc convergente. Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \in [\alpha, 1]$. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ (continuité de f sur $[\alpha, 1]$), on obtient

$\ell = f(\ell)$, donc

$$5\ell^2 - 9\ell + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell \in \left\{ \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10} \right\}.$$

Comme $\ell \in [0, 1]$, $\ell = \frac{9 - \sqrt{21}}{10} \approx 0,4417$.

Conclusion de l'exercice 3. (u_n) est **décroissante, bornée** dans $[\alpha, 1]$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{9 - \sqrt{21}}{10}.$$

x	0	$\frac{9 - \sqrt{21}}{10}$	1
$5x^2 - 9x + 3$	+	0	-

Lecture : l'unique point fixe α dans $[0, 1]$ est la limite. Les récurrences utilisent uniquement que f est croissante.