

Exercice 1

Partie A

On admet $a_{n+1} = 0,85 a_n + 450$ et on pose $v_n = a_n - 3000$.

1. a) (v_n) est géométrique de raison 0,85.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 3000 = (0,85 a_n + 450) - 3000 \\ &= 0,85 a_n - 2550 = 0,85 (v_n + 3000) - 2550 \\ &= 0,85 v_n + 2550 - 2550 = 0,85 v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et $v_0 = a_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$.

- b) **Forme de v_n .** $v_n = v_0 q^n = -2800 (0,85)^n$.

- c) **Forme de a_n .** $a_n = v_n + 3000 = -2800 (0,85)^n + 3000$.

- d) **Sens de variation de (a_n) .**

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (-2800 \cdot 0,85^{n+1} + 3000) - (-2800 \cdot 0,85^n + 3000) \\ &= -2800 \cdot 0,85^n (0,85 - 1) = 2800 \cdot 0,85^n \cdot 0,15 > 0. \end{aligned}$$

Donc (a_n) est **strictement croissante**.

2. **Compléter la fonction Python.** On cherche le premier n tel que $a_n > 2500$, en itérant $u \mapsto 0,85u + 450$ depuis $u = 200$.

```
def seuil():
    u = 200
    n = 0
    while u <= 2500:
        n = n + 1
        u = 0.85*u + 450
    return n
```

Partie B

Suite (u_n) : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$.

1. $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Sur $[0, +\infty[$, f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2. **Récurrence** : $u_n \geq 0$ pour tout n .

Initialisation : $u_0 = 1 \geq 0$. *Hérédité* : si $u_k \geq 0$ alors $5u_k + 4 \geq 4 > 0$ et $u_k + 2 \geq 2 > 0$, donc $u_{k+1} = \frac{5u_k + 4}{u_k + 2} > 0$. Conclusion : $u_n \geq 0$ pour tout n .

3. **Récurrence** : (u_n) est croissante.

Initialisation : $u_1 = f(1) = \frac{9}{3} = 3 \geq u_0 = 1$. *Hérédité* : si $u_{k+1} \geq u_k$ et $u_k, u_{k+1} \in [0, +\infty[$, alors par croissance de f : $u_{k+2} = f(u_{k+1}) \geq f(u_k) = u_{k+1}$. Ainsi (u_n) est croissante.

Exercice 2

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

On n'utilise pas les résultats d'une partie pour l'autre.

Partie A

On pose $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.

1. (v_n) est arithmétique; raison 1, premier terme 3.

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 1 = \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} + 1 = \frac{1+u_n}{u_n} + 1 = \frac{1}{u_n} + 1 + 1 = v_n + 1.$$

Donc (v_n) arithmétique de raison 1, et $v_0 = \frac{1}{1/2} + 1 = 3$.

2. **Formules de v_n puis u_n .**

$$v_n = 3 + n, \quad \frac{1}{u_n} = v_n - 1 = n + 2 \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{n + 2}}.$$

Partie B

Récurrence directe : $u_n = \frac{1}{n + 2}$.

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{0 + 2}$. *Hérédité* : si $u_k = \frac{1}{k + 2}$ alors

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1 + u_k} = \frac{\frac{1}{k+2}}{1 + \frac{1}{k+2}} = \frac{\frac{1}{k+2}}{\frac{k+3}{k+2}} = \frac{1}{k+3}.$$

Conclusion : $u_n = \frac{1}{n + 2}$ pour tout n .

Exercice 3

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

1. a) **Calcul de v_0 .** $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = 1.$

b) **Lien de récurrence pour (v_n) .**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = (u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n) - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

c) (v_n) est géométrique de raison $1/2$.

d) **Forme de v_n .** $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$

2. On pose $w_n = \frac{u_n}{v_n}.$

a) $w_0.$ $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1.$

b) **Exprimer w_{n+1} .** En utilisant $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$:

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n.$$

c) $w_{n+1} = w_n + 2.$ Démontré ci-dessus.

d) **Forme de w_n .** Suite arithmétique, raison 2, premier terme -1 :

$$w_n = w_0 + 2n = -1 + 2n.$$

3. **Formule de u_n .** $u_n = w_n v_n = (-1 + 2n) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{2n-1}{2^n}}.$

4. **Bonus : somme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.** Comme $u_k = \frac{2k-1}{2^k} = \frac{2k}{2^k} - \frac{1}{2^k},$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2k}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}.$$

On sait (par récurrence/technique des séries géométriques partielles) que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Donc

$$S_n = 2 \left(2 - \frac{n+2}{2^n} \right) - \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) = 4 - \frac{2n+4}{2^n} - 2 + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

$$\boxed{S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}}.$$