Exercice 1 (Questions de cours)

1. **Définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.**

   On dit qu'une suite (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si

   $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow u_n > A).$$

   Lecture : quelle que soit la barre A choisie (aussi grande que l'on veut), à partir d'un certain rang N tous les termes dépassent A.

2. **Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.**

   Hypothèses : (u_n) est croissante ($u_{n+1} \geq u_n$) et non majorée.
   But : montrer la définition ci-dessus.

   Soit $A \in \mathbb{R}$ arbitraire. Comme (u_n) n'est pas majorée, elle n'est pas majorée par A en particulier, donc

   $$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_N > A.$$

   Par croissance, pour tout $n \geq N$: $u_n \geq u_N > A$. On a bien

   $$\forall A\ \exists N\ \forall n \geq N,\ u_n > A,$$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2

Soit (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Calcul des 6 premiers termes à 10^{-2} près.**

   On applique la relation de récurrence pas à pas (on détaille les fractions puis la valeur décimale) :

$$\begin{aligned}
u_0 &= -1 && \Rightarrow \quad -1{,}00\\
u_1 &= \frac{1}{2}u_0 - 2 = \frac{1}{2}(-1) - 2 = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2} && = -2{,}50\\
u_2 &= \frac{1}{2}u_1 - 2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) - 2 = -\frac{5}{4} - 2 = -\frac{5}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{13}{4} && = -3{,}25\\
u_3 &= \frac{1}{2}u_2 - 2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{4}\right) - 2 = -\frac{13}{8} - 2 = -\frac{13}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{29}{8} && = -3{,}625 \approx -3{,}63\\
u_4 &= \frac{1}{2}u_3 - 2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{29}{8}\right) - 2 = -\frac{29}{16} - 2 = -\frac{29}{16} - \frac{32}{16} = -\frac{61}{16} && = -3{,}8125 \approx -3{,}81\\
u_5 &= \frac{1}{2}u_4 - 2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{61}{16}\right) - 2 = -\frac{61}{32} - 2 = -\frac{61}{32} - \frac{64}{32} = -\frac{125}{32} && = -3{,}90625 \approx -3{,}91
\end{aligned}$$

Réponse (arrondie) : $-1{,}00;\ -2{,}50;\ -3{,}25;\ -3{,}63;\ -3{,}81;\ -3{,}91.$

2. **Conjectures à partir des valeurs.**

   On observe $u_{n+1} < u_n$ (décroissance apparente), les valeurs se rapprochent de -4 par au-dessus : on conjecture

   $$\text{“}(u_n) \text{ est décroissante, minorée par } -4, \text{ et } \lim u_n = -4.\text{”}$$

3. **Minoration par -4 (démonstration par récurrence).**

   Proposition $P(n)$: $u_n \geq -4$.

   Initialisation : $u_0 = -1 \geq -4$ donc $P(0)$ vraie.

   Hérédité : supposons $P(k)$ vraie, i.e. $u_k \geq -4$. Alors

   $$u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k - 2 \ \geq\ \frac{1}{2}(-4) - 2 \ =\ -2 - 2 \ =\ -4.$$

   Donc $P(k+1)$ vraie.

   Conclusion : par récurrence, pour tout n, $u_n \geq -4$.

4. **Décroissance de (u_n) (calcul du « pas »).**

   On étudie $u_{n+1} - u_n$:

   $$u_{n+1} - u_n = \left(\tfrac{1}{2}u_n - 2\right) - u_n = -\tfrac{1}{2}u_n - 2.$$

   Comme $u_n \geq -4$ (point précédent), on a

   $$-\tfrac{1}{2}u_n - 2 \ \leq\ -\tfrac{1}{2}(-4) - 2 \ =\ 2 - 2 \ =\ 0.$$

   Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n : la suite est **décroissante**.

5. **Convergence et limite (méthode 1 : théorème de convergence monotone).**

   (u_n) est décroissante et minorée (par -4), donc elle converge. Soit $L = \lim u_n$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$, (continuité des fonctions affines),

   $$L = \frac{1}{2}L - 2 \quad \iff \quad \frac{1}{2}L = -2 \quad \iff \quad L = -4.$$

   Donc $\boxed{\lim u_n = -4}$.

6. **(Bonus utile pour les copies) Formule explicite (méthode 2).**

   Posons $v_n = u_n + 4$. Alors

   $$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 = \frac{1}{2}(u_n + 4) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = u_0 + 4 = -1 + 4 = 3$. Ainsi

$$v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad u_n = v_n - 4 = -4 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On lit immédiatement $u_n \searrow$ et $u_n \to -4$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$.

Exercice 3

Déterminer la limite de (u_n) dans chaque cas, en *détail*.

1. $u_n = \dfrac{-n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 3n - 2}$.

   On met en évidence le terme dominant n^2 (pour $n \geq 1$) :

$$u_n = \frac{n^2\left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{-1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}.$$

   Comme $\dfrac{1}{n} \to 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = -1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = 2 \neq 0.$$

   Par quotient des limites,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-1}{2}}.$$

2. $u_n = 3^n - 6^n$.

   On factorise par 6^n (terme dominant) :

$$u_n = 6^n\left(\frac{3^n}{6^n} - 1\right) = 6^n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right).$$

   Or $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$, donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1 \to -1$. Par produit :

$$6^n \to +\infty \quad \text{et} \quad \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 1\right) \to -1 \implies u_n \sim -6^n \implies \boxed{\lim u_n = -\infty}.$$

3. $u_n = n - \sqrt{n}$. **(deux méthodes)**

   Méthode A (factorisation par n) :

$$u_n = n\left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, on a $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$ et $n \to +\infty$, donc

$$\boxed{\lim u_n = +\infty}.$$

Méthode B (rationalisation, utile en copie) :

$$n - \sqrt{n} = \frac{(n-\sqrt{n})(n+\sqrt{n})}{n+\sqrt{n}} = \frac{n^2 - n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n(n-1)}{n+\sqrt{n}}.$$

Pour $n \geq 1$, $n + \sqrt{n} \leq n + n = 2n$, donc

$$n - \sqrt{n} \ \geq \ \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

D'où la même conclusion.

4. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   C'est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q = \frac{1}{2}$:

$$u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

   Or $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0$, donc

$$\boxed{\lim u_n = 2}.$$

5. $u_n = \dfrac{n}{n + \cos n}$.

   Pour $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{n}{n\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n}}.$$

   On encadre $\frac{\cos n}{n}$ par le théorème des gendarmes : comme $-1 \leq \cos n \leq 1$,

$$-\frac{1}{n} \ \leq \ \frac{\cos n}{n} \ \leq \ \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\cos n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

   Par continuité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en $x = 0$,

$$\boxed{\lim u_n = \frac{1}{1+0} = 1}.$$