

Exercice 1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les quatre questions sont indépendantes.

1. Supposons que pour un entier $n \geq 2$, la propriété $P(n)$: " $5^n \geq 4^n + 3^n$ " soit vraie. On cherche à montrer que $P(n+1)$ est vraie. $P(n+1)$ correspond à :

- a. $5^n \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$
- b. $5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$ (Réponse correcte)
- c. $5^{n+1} \geq 4^n + 3^n$

Justification : La propriété $P(n+1)$ est obtenue en remplaçant n par $n+1$ dans l'expression de $P(n)$.

2. Si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 3$ (initialisation) et est héréditaire à partir de $n = 6$, alors :

- a. elle est vraie pour tout $n \geq 3$,
- b. elle est vraie pour tout $n \geq 6$. (Réponse correcte)
- c. on ne peut rien conclure.

Justification : L'initialisation est à $n = 3$, mais l'hérédité n'est garantie qu'à partir de $n = 6$. La propriété pourrait être fausse pour $n = 4$ et $n = 5$. On ne peut donc conclure que pour $n \geq 6$.

3. Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est la propriété " $n^2 + 3$ est un multiple de 3".

- a. $P(0)$ est vraie. (Réponse correcte)
- b. $P(1)$ est vraie.
- c. Pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie.

Justification :

- Pour $n = 0$, $P(0)$ signifie " $0^2 + 3 = 3$ est un multiple de 3", ce qui est vrai.
- Pour $n = 1$, $P(1)$ signifie " $1^2 + 3 = 4$ est un multiple de 3", ce qui est faux.
- La proposition (c) est fausse, car $P(1)$ est fausse. $P(n)$ n'est pas vraie pour tout n . Par exemple, pour $n = 2$, $2^2 + 3 = 7$ n'est pas un multiple de 3.

4. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$ la propriété : " $u_n = 2 \times 3^n - 1$ ". On suppose que, pour un entier naturel k , la propriété $P(k)$ est vraie.

- a. $P(k+1)$ est la propriété : " $u_{k+1} = 2 \times 3^k - 1$ ".
- b. $P(k+1)$ est vraie. (Réponse correcte, *mais nécessite une démonstration*)
- c. la propriété n'est pas héréditaire.

Justification et démonstration de l'hérédité (pour montrer que la réponse b. est correcte) :

* $P(k+1)$ est la propriété " $u_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} - 1$ ". La proposition (a) est donc fausse. * Montrons que si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie (hérédité). On suppose que $u_k = 2 \times 3^k - 1$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k + 2 \\ &= 3(2 \times 3^k - 1) + 2 \quad (\text{par hypothèse de récurrence } P(k)) \\ &= 2 \times 3 \times 3^k - 3 + 2 \\ &= 2 \times 3^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression de $P(k+1)$. Donc, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire. * L'initialisation est facile : $u_0 = 1$ et $2 \times 3^0 - 1 = 2 - 1 = 1$, Donc $P(0)$ est vraie. * Puisque $P(0)$ est vraie et que la propriété est héréditaire, la propriété est vraie pour tout n . La réponse correcte est donc bien (b), *mais la question est un peu ambiguë car elle ne demande pas de *prouver* que $P(k+1)$ est vraie, juste de l'affirmer*. La proposition (c) est fausse.

Exercice 2 :

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $5 < u_n \leq 8$.

Soit $P(n)$ la propriété : " $5 < u_n \leq 8$ ". Nous allons démontrer $P(n)$ par récurrence.

- **Initialisation ($n = 0$) :** On a $u_0 = 8$. Comme $5 < 8 \leq 8$, la propriété $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Supposons que $P(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $5 < u_k \leq 8$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $5 < u_{k+1} \leq 8$.

On a $u_{k+1} = 0,2u_k + 4$. Par hypothèse de récurrence, $5 < u_k \leq 8$. Multiplions cette inégalité par 0,2 (qui est positif, donc conserve l'ordre) :

$$0,2 \cdot 5 < 0,2 \cdot u_k \leq 0,2 \cdot 8$$

$$1 < 0,2u_k \leq 1,6$$

Ajoutons 4 à chaque membre de l'inégalité :

$$1 + 4 < 0,2u_k + 4 \leq 1,6 + 4$$

$$5 < u_{k+1} \leq 5,6$$

Comme $5 < u_{k+1} \leq 5,6$ et que $5,6 < 8$, on a bien $5 < u_{k+1} \leq 8$. Donc, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5 < u_n \leq 8$.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.

Soit $Q(n)$ la propriété : " $u_{n+1} \leq u_n$ ". Nous allons démontrer $Q(n)$ par récurrence.

- **Initialisation** ($n = 0$) : On a $u_0 = 8$ et $u_1 = 0,2 \cdot 8 + 4 = 1,6 + 4 = 5,6$. Comme $5,6 \leq 8$, $u_1 \leq u_0$, donc $Q(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $Q(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq u_k$. Montrons que $Q(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2} \leq u_{k+1}$.

On a $u_{k+2} = 0,2u_{k+1} + 4$ et $u_{k+1} = 0,2u_k + 4$. Par hypothèse de récurrence, $u_{k+1} \leq u_k$. Multiplions par 0,2 (positif) :

$$0,2u_{k+1} \leq 0,2u_k$$

Ajoutons 4 :

$$0,2u_{k+1} + 4 \leq 0,2u_k + 4$$

$$u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

Donc, $Q(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété $Q(n)$ est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.

3) a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 3(0,2)^n + 5$

Soit $R(n)$ la propriété : " $u_n = 3(0,2)^n + 5$ ". Nous allons démontrer $R(n)$ par récurrence.

- **Initialisation** ($n = 0$) : On a $u_0 = 8$. Et $3(0,2)^0 + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$. Donc, $R(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $R(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $u_k = 3(0,2)^k + 5$. Montrons que $R(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = 3(0,2)^{k+1} + 5$.

On a $u_{k+1} = 0,2u_k + 4$. Par hypothèse de récurrence, $u_k = 3(0,2)^k + 5$. Substituons :

$$u_{k+1} = 0,2 \cdot (3(0,2)^k + 5) + 4$$

$$u_{k+1} = 0,2 \cdot 3(0,2)^k + 0,2 \cdot 5 + 4$$

$$u_{k+1} = 3(0,2)^{k+1} + 1 + 4$$

$$u_{k+1} = 3(0,2)^{k+1} + 5$$

Donc, $R(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : La propriété $R(n)$ est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3(0,2)^n + 5$.

3) b) Écrire une fonction en Python qui calcule u_N pour un $N \in \mathbb{N}$ quelconque.

```
def calculer_u(n) : """ Calcule le terme u_n de la suite. """ return 3 * (0.2) * n + 5
```

3) c) Écrire le programme employant cette fonction.

```
def calculer_u(n) : """ Calcule le terme u_n de la suite. """ return 3 * (0.2) * n + 5
```

Demander à l'utilisateur d'entrer la valeur de n `n = int(input("Entrez la valeur de n : "))`

Calculer u_n en utilisant la fonction `resultat = calculer_u(n)`

Afficher le résultat `print("u" + str(n) + " = " + str(resultat))`

Alternative pour afficher u_n pour n allant de 0 à 10 par exemple. `for i in range(11) : print("u", i, " = ", calculer_u(i))`

Exercice 3 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Soit $P(n)$ la propriété : " $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ ". Nous allons démontrer $P(n)$ par récurrence pour $n \geq 2$.

— Initialisation (n = 2) :

Pour $n = 2$, le membre de gauche est :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Le membre de droite est :

$$\frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

Comme les deux membres sont égaux, la propriété $P(2)$ est vraie.

— Hérédité :

Supposons que $P(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 2$, c'est-à-dire que :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Partons du membre de gauche de $P(k+1)$ et utilisons l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
 &= \underbrace{\left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]}_{\text{Par HR, égal à } \frac{k+1}{2k}} \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
 &= \frac{k+1}{2k} \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
 &= \frac{k+1}{2k} \times \left(\frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}\right) \\
 &= \frac{k+1}{2k} \times \left(\frac{k^2 + 2k + 1 - 1}{(k+1)^2}\right) \\
 &= \frac{k+1}{2k} \times \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \\
 &= \frac{k+1}{2k} \times \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+1)} \\
 &= \frac{(k+1) \cdot k \cdot (k+2)}{2k \cdot (k+1) \cdot (k+1)} \\
 &= \frac{k+2}{2(k+1)} \quad (\text{après simplification par } k(k+1), \text{ qui est non nul car } k \geq 2)
 \end{aligned}$$

On retrouve bien le membre de droite de $P(k+1)$. Donc, $P(k+1)$ est vraie.

— **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 2 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.