Exercice 1 : Calculs d'intégrales et moyenne (2 points)

1. On calcule $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$.

   On reconnaît la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ou plus généralement $u'u^{-\frac{1}{2}}$. Posons $u(x) = 3x+1$, alors $u'(x) = 3$. On ajuste la constante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{3} \times \frac{3}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$$

   Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. Donc :

$$I = \frac{1}{3}\left[2\sqrt{3x+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3(1)+1} - \sqrt{3(0)+1}\right)$$

$$I = \frac{2}{3}(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = \frac{2}{3}(2-1) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{I = \frac{2}{3}}$$

2. La valeur moyenne μ d'une fonction f sur $[a\,;\,b]$ est donnée par $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ici, $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$, donc $b - a = \frac{\pi}{2}$.

$$\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\mu = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin(0)\right)$$

   Or $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin(0) = 0$.

$$\mu = \frac{2}{3\pi}(-1-0) = \boxed{-\frac{2}{3\pi}}$$

Exercice 2 : Suites d'intégrales (8 points)

1. (a) Par linéarité de l'intégrale :

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{e^0}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

   L'intégrande se simplifie en 1 :

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{I_0 + I_1 = 1}$$

(b) Calculons $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$. Posons $u(x) = 1 + e^{-x}$. Alors $u'(x) = -e^{-x}$. On remarque que l'intégrande est de la forme $-\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$$I_1 = -\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\left[\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

(Car $1 + e^{-x} > 0$ sur $[0; 1]$).

$$I_1 = -\left(\ln(1+e^{-1}) - \ln(1+e^{0})\right) = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(2)$$

$$\boxed{I_1 = \ln(2) - \ln(1+e^{-1}) = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)}$$

On en déduit I_0 grâce à la question précédente :

$$I_0 = 1 - I_1 = \boxed{1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1})}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;\,1]$, $e^{-nx} > 0$ et $1 + e^{-x} > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est donc continue et positive sur $[0\,;\,1]$. Comme les bornes sont dans l'ordre croissant ($0 < 1$), l'intégrale d'une fonction positive est positive.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geq 0}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité :

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

On factorise le numérateur par e^{-nx} :

$$e^{-(n+1)x} + e^{-nx} = e^{-nx} \times e^{-x} + e^{-nx} \times 1 = e^{-nx}(e^{-x} + 1)$$

L'intégrale devient :

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

Une primitive de e^{-nx} est $\frac{e^{-nx}}{-n}$.

$$I_{n+1} + I_n = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}(e^{-n} - e^{0}) = -\frac{1}{n}(e^{-n} - 1)$$

$$\boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}}$$

(b) Nous savons que $I_{n+1} \geq 0$ (d'après la question 2). Donc $I_n \leq I_n + I_{n+1}$. En utilisant l'égalité démontrée ci-dessus :

$$\boxed{I_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement suivant (questions 2 et 3b) :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$$

Calculons la limite du terme de droite lorsque $n \to +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-e^{-n}) = 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

Exercice 3 : Étude de fonction et calcul d'aire (10 points)

1. **Étude de la fonction f.**

(a) **Intersection avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) :**

$f(0) = (0+2)e^0 = 2 \times 1 = 2$. Le point est $A(0\,;\,2)$.

Intersection avec l'axe des abscisses ($f(x) = 0$) :

$(x+2)e^{-x} = 0$. Comme $e^{-x} \neq 0$ pour tout réel, on a $x + 2 = 0 \iff x = -2$.

Le point est $B(-2\,;\,0)$.

(b) **Limites :**

- En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

  Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

- En $+\infty$: $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$.

  Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

  De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$.

  Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Asymptote : La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

(c) **Variations :** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. $f = u \times v$ avec

$u(x) = x + 2$ et $v(x) = e^{-x}$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - (x+2)) = e^{-x}(-x-1)$$

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$. $-x-1 \geq 0 \iff x \leq -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Maximum : $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = 1e^1 = e$.

2. **Calcul d'une valeur approchée.**

   (a) **Valeur numérique :** La fonction Python calcule la somme des aires des rectangles "à gauche". Largeur $= \frac{1}{4} = 0,25$. Hauteurs : $f(0), f(0,25), f(0,5), f(0,75)$.

   $$S \approx 0,25 \times [f(0) + f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)]$$

   Calculons les images : $f(0) = 2$ $f(0,25) = 2,25e^{-0,25} \approx 1,7523$ $f(0,5) = 2,5e^{-0,5} \approx 1,5163$ $f(0,75) = 2,75e^{-0,75} \approx 1,3003$ Somme $\approx 6,5689$. $S \approx 0,25 \times 6,5689 \approx 1,642$.

   $$\boxed{\text{Valeur renvoyée} \approx 1,642}$$

   (b) **Modification du code Python :** On remplace le nombre fixe d'itérations (4) par N et la largeur $\dfrac{1}{4}$ par $\dfrac{1}{N}$. La fonction prendra N en paramètre.

```
def valapp(N) :
    S = 0
    for i in range (0, N) :
        S = S + (1/N) * f(i/N)
    return S
```

3. **Calcul de la valeur exacte (Intégration par parties).** On cherche $A = \displaystyle\int_0^1 (x+2)e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Posons :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x+2 & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont dérivables de dérivées continues sur $[0;1]$. D'après la formule d'intégration par parties $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$:

$$A = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x})\,\mathrm{d}x$$

$$A = \left(-3e^{-1} - (-2e^0)\right) - \int_0^1 -e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$A = -3e^{-1} + 2 + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

On sait que $\int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-1) = 1 - e^{-1}$.

$$A = -3e^{-1} + 2 + (1 - e^{-1})$$

$$A = 3 - 4e^{-1} = 3 - \frac{4}{e}$$

L'aire exacte est $\boxed{3 - \frac{4}{e} \text{ u.a.}}$