Exercice 1 : (2 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = \cos(3x)$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2 : (8 points)

On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Montrer que $I_0 + I_1 = 1$.
   (b) Calculer I_1 et en déduire I_0.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \geq 0$.
3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
   (b) En déduire que pour tout entier non nul $I_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
4. Déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 3 : (10 points)

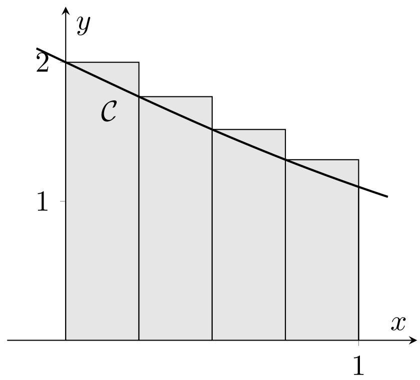
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **Étude de la fonction f.**
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.
   (b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. **Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.**

   On note D le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine D en calculant une somme d'aires de rectangles.

(a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $[0\,;\,\frac{1}{4}]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$.
- Sur l'intervalle $[\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}]$, on construit un rectangle de hauteur $f(\frac{1}{4})$.
- Sur l'intervalle $[\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}]$, on construit un rectangle de hauteur $f(\frac{1}{2})$.
- Sur l'intervalle $[\frac{3}{4}\,;\,1]$, on construit un rectangle de hauteur $f(\frac{3}{4})$.



Cette construction est illustrée ci-contre.
La fonction `valapp`, en python, ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine D en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents.
Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat renvoyé par cette fonction.

```
from math import exp
def f(x) :
    return (x+2)*exp(-x)

def valapp() :
    S=0
    for i in range (0,4) :
        S=S+1/4*f(i/4)
    return S
```

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1.
On découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier la fonction `valapp` précédente afin qu'elle renvoie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. **Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.**

Calculer l'aire A du domaine D, exprimée en unités d'aire à l'aide d'une intégration par parties.