Exercice 1 : Calculs de primitives

Dans chaque cas, k désigne une constante réelle ($k \in \mathbb{R}$).

1. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5$ sur $\mathbb{R}$.

   f est une fonction polynôme. Une primitive est de la forme $a\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

   $$F(x) = 4 \times \frac{x^4}{4} - 6 \times \frac{x^3}{3} + 2 \times \frac{x^2}{2} - 5x + k$$

   En simplifiant :

   $$\boxed{F(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + k}$$

2. $f(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2x^{-3} - x^{-\frac{1}{2}}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   On applique la formule pour x^n (avec $n \neq -1$) qui a pour primitive $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et on rappelle que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a pour primitive $2\sqrt{x}$.

   $$F(x) = 2 \times \frac{x^{-2}}{-2} - 2\sqrt{x} + k = -x^{-2} - 2\sqrt{x} + k$$

   Soit :

   $$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x} + k}$$

3. $f(x) = x\left(x^2+1\right)^4$ sur $\mathbb{R}$.

   On reconnaît la forme $u'(x) \times (u(x))^n$ avec $u(x) = x^2 + 1$, d'où $u'(x) = 2x$ et $n = 4$. Il nous manque un facteur 2, on écrit donc :

   $$f(x) = \frac{1}{2} \times \underbrace{2x}_{u'}\underbrace{\left(x^2+1\right)^4}_{u^4}$$

   Une primitive est de la forme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.

   $$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\left(x^2+1\right)^5}{5} + k$$

   $$\boxed{F(x) = \frac{1}{10}\left(x^2+1\right)^5 + k}$$

4. $f(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} = 3 \times \dfrac{1}{(x+2)^2}$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

   On reconnaît la forme $k \times \dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x + 2$ et $u'(x) = 1$. On sait que $\dfrac{u'}{u^2}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{u}$.

   $$\boxed{F(x) = -\frac{3}{x+2} + k}$$

5. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+3}$ sur $\mathbb{R}$.

   On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 3$. On a bien $u'(x) = e^x$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + 3 > 0$. Une primitive est donc de la forme $\ln(u)$.

$$\boxed{F(x) = \ln(e^x + 3) + k}$$

6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ sur $I =]1\,;+\infty[$.

   Détermination des réels a, b, c : On met l'expression $ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ au même dénominateur pour tout $x \in I$:

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2 + (b-a)x + (c-b)}{x-1}$$

   Par identification avec le numérateur de $f(x)$ qui est $1x^2 - 4x + 5$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -4 \\ c - b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 + 1 = -3 \\ c = 5 + (-3) = 2 \end{cases}$$

   On a donc, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = x - 3 + \frac{2}{x-1}$$

   Calcul de la primitive : On cherche les primitives de la somme de ces termes.

   - Une primitive de $x \mapsto x$ est $\dfrac{x^2}{2}$.
   - Une primitive de $x \mapsto -3$ est $-3x$.
   - Pour $x \mapsto \dfrac{2}{x-1} = 2 \times \dfrac{1}{x-1}$, on reconnaît la forme $2 \times \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x - 1$. Comme $x \in]1\,;+\infty[$, on a $x - 1 > 0$, donc une primitive est $2\ln(x-1)$.

   L'ensemble des primitives F est donné par :

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln(x-1) + k}$$

Exercice 2 : Condition initiale

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Elle admet donc des primitives sur I.
2. On écrit $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$. On reconnaît la forme $u'(x) \times u(x)$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Une primitive de $u'u^1$ est $\frac{u^2}{2}$. Les primitives de f sur I sont donc définies par :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2 + k}$$

où k est une constante réelle.

3. On cherche l'unique primitive G telle que $G(e) = 2$.

$$G(e) = \frac{1}{2}(\ln(e))^2 + k = 2$$

Or $\ln(e) = 1$, donc :

$$\frac{1}{2}(1)^2 + k = 2 \iff \frac{1}{2} + k = 2 \iff k = 2 - 0,5 = 1,5$$

La primitive cherchée est :

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + \frac{3}{2}}$$

Exercice 3 : Lecture graphique et primitives

1. D'après le graphique, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située :
   - au-dessus de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$;
   - en dessous de l'axe des abscisses sur $]-2\,;\,2[$.

   On en déduit le signe de $f(x)$:

$$f(x) > 0 \text{ si } x \in]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ si } x \in]-2\,;\,2[$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in \{-2\,;\,2\}$$

2. F est une primitive de f, donc $F'(x) = f(x)$. Les variations de F dépendent du signe de $f(x)$. D'après la question précédente :
   - Sur $]-\infty\,;\,-2]$, $F'(x) \geqslant 0$, donc F est croissante.
   - Sur $[-2\,;\,2]$, $F'(x) \leqslant 0$, donc F est décroissante.
   - Sur $[2\,;\,+\infty[$, $F'(x) \geqslant 0$, donc F est croissante.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$	$F(-2)$	$\searrow$	$F(2)$	$\nearrow$	

3. (a) La convexité de F est donnée par le signe de sa dérivée seconde $F''(x)$. Or $F'(x) = f(x)$, donc $F''(x) = f'(x)$. Graphiquement, $f'(x)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$.
   - Sur $]-\infty\,;\,0]$, la fonction f est décroissante, donc $f'(x) \leqslant 0$. F est **concave**.
   - Sur $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f est croissante, donc $f'(x) \geqslant 0$. F est **convexe**.

   Sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$, la fonction F est donc concave sur $[-2\,;\,0]$ puis convexe sur $[0\,;\,2]$.

   (b) La courbe représentative de F admet un point d'inflexion lorsque la convexité change, c'est-à-dire lorsque $F''(x)$ (donc $f'(x)$) s'annule en changeant de signe. C'est le cas en $x = 0$ (sommet de la parabole $\mathcal{C}_f$, tangente horizontale et changement de sens de variation de f). **Le point d'inflexion a pour abscisse 0.**

Exercice 4 : Problème de synthèse

1. Pour démontrer que H est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on dérive H. $H(x) = (-x-3)e^{-x}$. On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

$$u(x) = -x - 3 \implies u'(x) = -1$$

$$v(x) = e^{-x} \implies v'(x) = -e^{-x}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
H'(x) &= (-1) \times e^{-x} + (-x-3) \times (-e^{-x}) \\
&= -e^{-x} + (x+3)e^{-x} \\
&= e^{-x}(-1 + x + 3) \\
&= (x+2)e^{-x} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

On a bien $H'(x) = f(x)$ pour tout réel x, donc H **est une primitive de** f **sur** $\mathbb{R}$.

2. (a) Les primitives F de f sont de la forme $F(x) = H(x) + k$, soit :

$$F(x) = (-x-3)e^{-x} + k$$

On veut que la courbe passe par $A(0\,;\,-2)$, donc $F(0) = -2$.

$$(-0-3)e^{0} + k = -2 \iff -3 \times 1 + k = -2 \iff k = 1$$

L'expression de F est donc :

$$\boxed{F(x) = (-x-3)e^{-x} + 1}$$

(b) Calcul de la limite en $+\infty$:

$$F(x) = -xe^{-x} - 3e^{-x} + 1 = -\frac{x}{e^x} - \frac{3}{e^x} + 1$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{e^x} = 0$.

Par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1}$$

3. (a) $g(x) = f(x) - e^{-x} = (x+2)e^{-x} - e^{-x}$.

En factorisant par e^{-x} :

$$g(x) = (x+2-1)e^{-x} = (x+1)e^{-x}$$

(b) On cherche une primitive G de g. Par linéarité de l'intégrale (ou propriété des primitives), comme $g(x) = f(x) - e^{-x}$, une primitive de g est la somme d'une primitive de f et d'une primitive de $-e^{-x}$.

- Une primitive de $f(x)$ est $H(x) = (-x-3)e^{-x}$ (d'après la question 1).
- Une primitive de $x \mapsto -e^{-x}$ est $x \mapsto e^{-x}$ (car $(e^{-x})' = -e^{-x}$).

Donc :

$$G(x) = H(x) + e^{-x} = (-x-3)e^{-x} + e^{-x}$$

En factorisant :

$$G(x) = (-x-3+1)e^{-x}$$

$$\boxed{G(x) = (-x-2)e^{-x}}$$