Exercice 1 : Calculs de primitives (7 points)

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur un intervalle I précisé, déterminer l'ensemble des primitives F de f sur I.

1. Soit f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5$$
2. Soit f définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$
3. Soit f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x\left(x^2+1\right)^4$$
4. Soit f définie sur $I =]-2\,;\,+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$
5. Soit f définie sur $I = \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+3}$$
6. Soit f définie sur $I =]1\,;\,+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x-1}$$
Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, puis en déduire les primitives de f sur I.

Exercice 2 : Condition initiale (4 points)

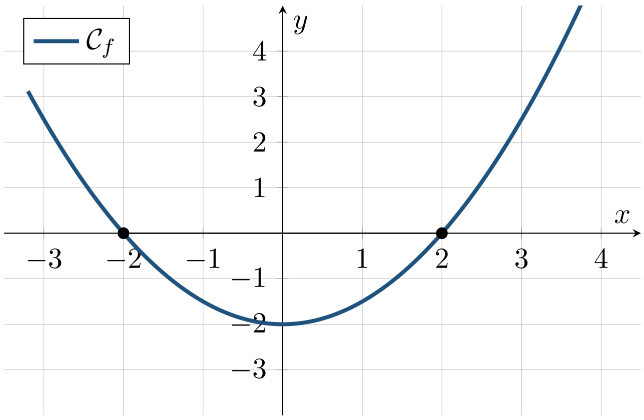
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. Justifier que la fonction f admet des primitives sur l'intervalle I.
2. En remarquant que $f(x)$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$, déterminer les primitives F de f sur I.
3. Déterminer l'unique primitive G de la fonction f sur I qui vérifie la condition $G(e) = 2$.

Exercice 3 : Lecture graphique et primitives (4 points)

On a tracé ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.



1. À l'aide du graphique, déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. En déduire les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de F (sans calculer les limites ni les valeurs images).
3. On suppose de plus que $f'(0) = 0$ (tangente horizontale en $x = 0$ pour $\mathcal{C}_f$).
   (a) Quelle est la convexité de la fonction F sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$? Justifier.
   (b) La courbe représentative de F admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner son abscisse.

Exercice 4 : Problème de synthèse (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

1. Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On cherche une primitive F de f telle que sa courbe représentative passe par le point $A(0\,;\,-2)$.
   (a) Exprimer $F(x)$ en fonction de x.
   (b) Calculer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - e^{-x}$.
   (a) Simplifier l'expression de $g(x)$.
   (b) En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.