Correction Exercice 1

Partie A

Soit g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$.

1. **Étude des variations de g :**

   - **Limites :**

     En 0^+ : $\lim\limits_{x \to 0} 2x^3 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$. Par somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty}$.

     En $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. Par somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.

   - **Dérivée :**

     g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

     $$g'(x) = 2 \times 3x^2 - 0 + \frac{2}{x} = 6x^2 + \frac{2}{x}$$

     Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ et $x > 0$, donc $g'(x) > 0$.

   La fonction g est donc **strictement croissante** sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **Existence et unicité de α :**

   - La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
   - L'image de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est $]-\infty\,;\,+\infty[$, qui contient 0.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une **unique solution** α sur $]0\,;\,+\infty[$.

   À la calculatrice : $g(0,86) \approx -0,04$ et $g(0,87) \approx 0,02$. Donc $\boxed{\alpha \approx 0,86}$.

3. **Signe de g :** Puisque g est croissante et s'annule en α :

   - Si $0 < x < \alpha$, alors $g(x) < 0$.
   - Si $x = \alpha$, alors $g(x) = 0$.
   - Si $x > \alpha$, alors $g(x) > 0$.

Partie B

Soit $f(x) = 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. **Limites de f :**
   - En 0^+ : $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$. Pour le terme $\frac{\ln(x)}{x^2} = \ln(x) \times \frac{1}{x^2}$: $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc par produit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$. Par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$.
   - En $+\infty$: Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
2. **Étude de l'asymptote Δ :**
   (a) (Voir tracé en annexe).

   (b) Calcul de la limite de la différence : $f(x) - 2x = -\frac{\ln(x)}{x^2}$. Nous avons vu précédemment que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0}$.

   Interprétation : La droite Δ d'équation $y = 2x$ est **asymptote oblique** à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   (c) **Positions relatives :** On étudie le signe de $d(x) = f(x) - 2x = -\frac{\ln(x)}{x^2}$. Puisque $x^2 > 0$ sur le domaine, le signe dépend de $-\ln(x)$.
   - $-\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$.
   - $-\ln(x) < 0 \iff \ln(x) > 0 \iff x > 1$.

   Conclusion :
   - Sur $]0\,;\,1[$, $\mathcal{C}$ est **au-dessus** de Δ.
   - Sur $]1\,;\,+\infty[$, $\mathcal{C}$ est **au-dessous** de Δ.
   - En $x = 1$, elles se coupent.
3. **Calcul de la dérivée :**
   $f(x) = 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}$. On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x^2$.
   $u'(x) = 1/x$ et $v'(x) = 2x$.

$$\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Donc :

$$f'(x) = 2 - \left(\frac{1 - 2\ln x}{x^3}\right) = \frac{2x^3 - (1 - 2\ln x)}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$$

On reconnait l'expression de $g(x)$ au numérateur :

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}}$$

Comme $x^3 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ a bien le même signe que $g(x)$.

4. **Tableau de variations de f :** D'après la partie A, $g(x)$ est négatif sur $]0\,;\,\alpha[$ et positif sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Note : $f(\alpha) \approx f(0,86) \approx 1,93$.

Correction Exercice 2

Partie A

$f(x) = 4\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{25}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

1. **Limite en -1 :** On pose $X = x+1$. Quand $x \to -1$, $X \to 0^+$. $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$.

   Par ailleurs $\lim\limits_{x\to -1} -\dfrac{x^2}{25} = -\dfrac{1}{25}$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty}$.

2. **Variations :** $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x}{25} = \dfrac{100 - 2x(x+1)}{25(x+1)} = \dfrac{-2x^2 - 2x + 100}{25(x+1)}$.

   Le signe dépend du numérateur $-2x^2 - 2x + 100$. $\Delta = 4 - 4(-2)(100) = 804 > 0$.

   Racines : $x_1 \approx -7,59$ (hors domaine) et $x_2 \approx 6,59$.

   Sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$, x est entre les racines (car $6,5 < x_2$), donc le trinôme est positif ($a = -2$). De plus le dénominateur est positif. Donc $f'(x) > 0$ sur $[2\,;\,6,5]$.

   Conclusion : f est strictement croissante sur $[2\,;\,6,5]$.

3. **Équation $h(x) = 0$:** On sait que $h(x) = f(x) - x$. D'après le tableau de variation fourni :
   - h est continue sur $[2\,;\,6,5]$.
   - h admet un maximum positif ($M \approx 2,265$).
   - $h(2) = f(2) - 2 \approx 2,23 > 0$.
   - $h(6,5) = f(6,5) - 6,5 \approx -0,1 < 0$.

   Sur l'intervalle $[m\,;\,6,5]$, la fonction h est strictement décroissante, continue, et passe d'une valeur positive M à une valeur négative $h(6,5)$.

   D'après le Corollaire du TVI, il existe une unique solution α dans cet intervalle. Comme h est positive avant le maximum, il n'y a pas d'autre solution.

   $\boxed{\text{Unique solution } \alpha \in [2\,;\,6,5].}$

4. **Python :**
   (a) La fonction ‘bornes(2)‘ cherche l’encadrement de la solution α au centième près ($p = 0.01$).

   Elle commence à $x = 6$ et avance par pas de $0,01$ tant que $h(x) > 0$.

   Calculons :

   $h(6,40) \approx 4\ln(7,4) - \frac{6,4^2}{25} - 6,40 \approx 0,005 > 0.$

   $h(6,41) \approx 4\ln(7,41) - \frac{6,41^2}{25} - 6,41 \approx -0,007 < 0.$

   La boucle s’arrête à $x = 6,41$. La fonction renvoie $(x - p, x)$.

   $\boxed{\text{Valeurs renvoyées : } (6.40, 6.41)}$.

   (b) **Interprétation :** Ce sont les bornes d’un encadrement de α d’amplitude 10^{-2}.

   On a $6,40 < \alpha < 6,41$.

Partie B

$u_0 = 2$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Récurrence :** Soit $P(n) : 2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

   Initialisation : Pour $n = 0$. $u_0 = 2$. $u_1 = f(2) = 4\ln(3) - \frac{4}{25} \approx 4,39 - 0,16 = 4,23$.

   On a bien $2 \leq 2 \leq 4,23 < 6,5$. $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons $P(k)$ vraie : $2 \leq u_k \leq u_{k+1} < 6,5$.

   La fonction f est strictement croissante sur $[2\,;\,6,5]$ (démontré en A.2).

   On applique f à l’inégalité : $f(2) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(6,5)$.

   On sait que : $f(2) \approx 4,23 > 2$.

   $f(u_k) = u_{k+1}$ et $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$.

   $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$ (car $h(6,5) < 0 \implies f(6,5) < 6,5$).

   Donc : $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} < 6,5$. $P(k+1)$ est vraie.

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.
2. **Convergence :** La suite (u_n) est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et majorée par $6,5$.

   D’après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers une limite ℓ.
3. **Limite :** La fonction f est continue. La limite ℓ vérifie donc l’équation du point fixe : $f(\ell) = \ell$, soit $f(\ell) - \ell = 0$, ou encore $h(\ell) = 0$.

   De plus, comme $2 \leq u_n \leq 6,5$ pour tout n, on a $\ell \in [2\,;\,6,5]$.

   Or, d’après la partie A, l’unique solution de $h(x) = 0$ sur cet intervalle est α.

   Donc $\boxed{\ell = \alpha}$.

Correction Exercice 3

Soit $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{-3x+1} + 2$.

On a $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Calculons $u'(x)$ en utilisant la formule du produit $(ab)' = a'b + ab'$:

Posons $a(x) = x^2 + 1 \implies a'(x) = 2x$.

Posons $b(x) = \mathrm{e}^{-3x+1} \implies b'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x+1}$.

$$u'(x) = 2x\mathrm{e}^{-3x+1} + (x^2+1)(-3\mathrm{e}^{-3x+1})$$
$$u'(x) = \mathrm{e}^{-3x+1}(2x - 3(x^2+1))$$
$$u'(x) = \mathrm{e}^{-3x+1}(-3x^2 + 2x - 3)$$

D'où :

$$\boxed{f'(x) = \frac{(-3x^2+2x-3)\mathrm{e}^{-3x+1}}{(x^2+1)\mathrm{e}^{-3x+1} + 2}}$$

Correction du tracé (Annexe)