Exercice 1

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$$

1. Dresser le tableau de variation complet de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (Limites incluses et rédigées avec soin...)
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α au centième.
3. En déduire le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. (donné en annexe, voir fin de l'exercice.)

1. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
2. On considère dans cette question la droite Δ d'équation $y = 2x$.
   (a) Tracer Δ dans le repère fourni en annexe.
   (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x)$.
   Comment interprétez-vous graphiquement ce résultat ?
   (c) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 4\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{25}$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$.
3. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2,364$	$6,5$
$h(x)$	$h(2)$ ↗	$M \approx 2,265$	↘ $h(6,5)$

   Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\,;\,6,5]$.
4. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
       x = x + p
    return (x-p, x)
```

   On rappelle qu'en langage Python :
   - la commande `log(x)` renvoie la valeur $\ln(x)$;
   - la commande `c**d` renvoie la valeur de c^d.

(a) Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`. On donnera les valeurs arrondies au centième.

(b) Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel :

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\,;\,6,5]$.
   Justifier que $\ell = \alpha$.

Exercice 3

Sans tenir compte de l'ensemble de dérivabilité, calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln[(x^2+1)\mathrm{e}^{-3x+1} + 2]$$

Annexe (Exercice 1)