Exercice 1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les quatre questions sont indépendantes.

1. Supposons que pour un entier $n \geq 2$, la propriété $P(n)$: $"5^n \geq 4^n + 3^n"$ soit vraie. On cherche à montrer que $P(n+1)$ est vraie. $P(n+1)$ correspond à :

   a. $5^n \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$
   b. $\boxed{5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}}$ **(Réponse correcte)**
   c. $5^{n+1} \geq 4^n + 3^n$

   Justification : La propriété $P(n+1)$ est obtenue en remplaçant n par $n+1$ dans l'expression de $P(n)$.

2. Si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 3$ (initialisation) et est héréditaire à partir de $n = 6$, alors :

   a. elle est vraie pour tout $n \geq 3$,
   b. $\boxed{\text{elle est vraie pour tout } n \geq 6.}$ **(Réponse correcte)**
   c. on ne peut rien conclure.

   Justification : L'initialisation est à $n = 3$, mais l'hérédité n'est garantie qu'à partir de $n = 6$. La propriété pourrait être fausse pour $n = 4$ et $n = 5$. On ne peut donc conclure que pour $n \geq 6$.

3. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété "$n^2 + 3$ est un multiple de 3".

   a. $\boxed{P(0) \text{ est vraie.}}$ **(Réponse correcte)**
   b. $P(1)$ est vraie.
   c. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

   Justification :

   - Pour $n = 0$, $P(0)$ signifie "$0^2 + 3 = 3$ est un multiple de 3", ce qui est vrai.
   - Pour $n = 1$, $P(1)$ signifie "$1^2 + 3 = 4$ est un multiple de 3", ce qui est faux.
   - La proposition (c) est fausse, car $P(1)$ est fausse. $P(n)$ n'est pas vraie pour tout n. Par exemple, pour $n = 2$, $2^2 + 3 = 7$ n'est pas un multiple de 3.

4. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la propriété : "$u_n = 2 \times 3^n - 1$". On suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie.

   a. $P(k+1)$ est la propriété : "$u_{k+1} = 2 \times 3^k - 1$".
   b. $\boxed{P(k+1) \text{ est vraie.}}$ **(Réponse correcte, *mais nécessite une démonstration*)**
   c. la propriété n'est pas héréditaire.

Justification et démonstration de l'hérédité (pour montrer que la réponse b. est correcte) :

* $P(k+1)$ est la propriété "$u_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} - 1$". La proposition (a) est donc fausse. * Montrons que si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie (hérédité). On suppose que $u_k = 2 \times 3^k - 1$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k + 2 \\ &= 3(2 \times 3^k - 1) + 2 \quad \text{(par hypothèse de récurrence } P(k)) \\ &= 2 \times 3 \times 3^k - 3 + 2 \\ &= 2 \times 3^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression de $P(k+1)$. Donc, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire. * L'initialisation est facile : $u_0 = 1$ et $2 \times 3^0 - 1 = 2 - 1 = 1$, Donc P(0) est vraie. * Puisque P(0) est vraie et que la propriété est héréditaire, la propriété est vraie pour tout n. La réponse correcte est donc bien (b), *mais la question est un peu ambiguë car elle ne demande pas de *prouver* que P(k+1) est vraie, juste de l'affirmer*. La proposition (c) est fausse.

Exercice 2 :

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $5 < u_n \leq 8$.

Soit $P(n)$ la propriété : "$5 < u_n \leq 8$". Nous allons démontrer $P(n)$ par récurrence.

- **Initialisation ($n = 0$) :** On a $u_0 = 8$. Comme $5 < 8 \leq 8$, la propriété $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Supposons que $P(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $5 < u_k \leq 8$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $5 < u_{k+1} \leq 8$.

  On a $u_{k+1} = 0,2u_k + 4$. Par hypothèse de récurrence, $5 < u_k \leq 8$. Multiplions cette inégalité par 0,2 (qui est positif, donc conserve l'ordre) :

  $$0,2 \cdot 5 < 0,2 \cdot u_k \leq 0,2 \cdot 8$$
  $$1 < 0,2u_k \leq 1,6$$

  Ajoutons 4 à chaque membre de l'inégalité :

  $$1 + 4 < 0,2u_k + 4 \leq 1,6 + 4$$
  $$5 < u_{k+1} \leq 5,6$$

  Comme $5 < u_{k+1} \leq 5,6$ et que $5,6 < 8$, on a bien $5 < u_{k+1} \leq 8$. Donc, $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5 < u_n \leq 8$.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.

Soit $Q(n)$ la propriété : "$u_{n+1} \leq u_n$". Nous allons démontrer $Q(n)$ par récurrence.

- **Initialisation ($n = 0$) :** On a $u_0 = 8$ et $u_1 = 0,2 \cdot 8 + 4 = 1,6 + 4 = 5,6$. Comme $5,6 \leq 8$, $u_1 \leq u_0$, donc $Q(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Supposons que $Q(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq u_k$. Montrons que $Q(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+2} \leq u_{k+1}$.

  On a $u_{k+2} = 0,2u_{k+1} + 4$ et $u_{k+1} = 0,2u_k + 4$. Par hypothèse de récurrence, $u_{k+1} \leq u_k$. Multiplions par 0,2 (positif) :
  $$0,2u_{k+1} \leq 0,2u_k$$
  Ajoutons 4 :
  $$0,2u_{k+1} + 4 \leq 0,2u_k + 4$$
  $$u_{k+2} \leq u_{k+1}$$
  Donc, $Q(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** La propriété $Q(n)$ est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.

3) a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 3(0,2)^n + 5$

Soit $R(n)$ la propriété : "$u_n = 3(0,2)^n + 5$". Nous allons démontrer $R(n)$ par récurrence.

- **Initialisation ($n = 0$) :** On a $u_0 = 8$. Et $3(0,2)^0 + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$. Donc, $R(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Supposons que $R(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $u_k = 3(0,2)^k + 5$. Montrons que $R(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = 3(0,2)^{k+1} + 5$.

  On a $u_{k+1} = 0,2u_k + 4$. Par hypothèse de récurrence, $u_k = 3(0,2)^k + 5$. Substituons :
  $$u_{k+1} = 0,2 \cdot (3(0,2)^k + 5) + 4$$
  $$u_{k+1} = 0,2 \cdot 3(0,2)^k + 0,2 \cdot 5 + 4$$
  $$u_{k+1} = 3(0,2)^{k+1} + 1 + 4$$
  $$u_{k+1} = 3(0,2)^{k+1} + 5$$
  Donc, $R(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion :** La propriété $R(n)$ est initialisée au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3(0,2)^n + 5$.

3) b) Écrire une fonction en Python qui calcule u_N pour un $N \in \mathbb{N}$ quelconque.

def calculer$_u(n)$: $"""Calculeletermeu_ndelasuite."""return3*(0.2)**n+5$

3) c) Écrire le programme employant cette fonction.

def calculer$_u(n)$: $"""Calculeletermeu_ndelasuite."""return3*(0.2)**n+5$

Demander à l'utilisateur d'entrer la valeur de n n = int(input("Entrez la valeur de n : "))

Calculer u$_nenutilisantlafonctionresultat = calculer_u(n)$

Afficher le résultat print("u$_" + str(n) + " = " + str(resultat))$

Alternative pour afficher u$_npourallantde010parexemple.foriinrange(11) : print("u_", i, " = ", calculer_u(i))$

Exercice 3 :

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

Soit $P(n)$ la propriété : "$(1-\frac{1}{2^2})\times(1-\frac{1}{3^2})\times\cdots\times(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$". Nous allons démontrer $P(n)$ par récurrence pour $n \geq 2$.

- **Initialisation (n = 2) :**

  Pour $n = 2$, le membre de gauche est :

  $$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

  Le membre de droite est :

  $$\frac{2+1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$$

  Comme les deux membres sont égaux, la propriété $P(2)$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que $P(k)$ est vraie pour un certain entier $k \geq 2$, c'est-à-dire que :

  $$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$$

  Montrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

  $$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

Partons du membre de gauche de $P(k+1)$ et utilisons l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\
&=\underbrace{\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right]}_{\text{Par HR, égal à }\frac{k+1}{2k}}\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\
&=\frac{k+1}{2k}\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\
&=\frac{k+1}{2k}\times\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)\\
&=\frac{k+1}{2k}\times\left(\frac{k^2+2k+1-1}{(k+1)^2}\right)\\
&=\frac{k+1}{2k}\times\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\\
&=\frac{k+1}{2k}\times\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+1)}\\
&=\frac{(k+1)\cdot k\cdot(k+2)}{2k\cdot(k+1)\cdot(k+1)}\\
&=\frac{k+2}{2(k+1)}\quad\text{(après simplification par }k(k+1)\text{, qui est non nul car }k\geq 2)
\end{aligned}$$

On retrouve bien le membre de droite de $P(k+1)$. Donc, $P(k+1)$ est vraie.

— **Conclusion :**

La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 2 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.