Exercice 1

4,5 points

1) Les limites du numérateur et du dénominateur conduisent à une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On met en facteur le terme de plus haut degré. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{n^2\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$. Par somme, le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1. Par quotient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 3}.$$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-4n + 3) = -\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée ; par somme :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty}.$$

3) Pour tout entier naturel n :

$$a_n = (-4)^n \times 0{,}5^n = (-4 \times 0{,}5)^n = (-2)^n.$$

(a_n) est une suite géométrique de raison $q = -2$. Comme $q \leqslant -1$,

$$\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ n'a pas de limite}}.$$

En effet, ses termes de rang pair, $a_{2k} = 4^k$, tendent vers $+\infty$, alors que ses termes de rang impair, $a_{2k+1} = -2 \times 4^k$, tendent vers $-\infty$.

4) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant 1 + \cos(n) \leqslant 2$.

De plus $n \geqslant 1$ donne $1 - 2n \leqslant -1 < 0$: en divisant par le nombre **strictement négatif** $1 - 2n$, on change le sens des inégalités :

$$\frac{2}{1-2n} \leqslant \frac{1+\cos(n)}{1-2n} \leqslant 0, \qquad \text{soit} \qquad \frac{2}{1-2n} \leqslant b_n \leqslant 0.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 2n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{1-2n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes :

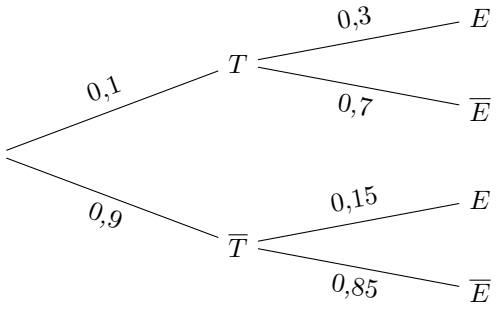
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 0}.$$

Exercice 2

8 points

Partie A

1) D'après l'énoncé : $P(T) = 0{,}1$, $P_T(E) = 0{,}3$ et $P_{\overline{T}}\left(\overline{E}\right) = 0{,}85$, donc $P_{\overline{T}}(E) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.



$$P\left(\overline{T} \cap E\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(E) = 0{,}9 \times 0{,}15 = \boxed{0{,}135}.$$

2) T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T \cap E) + P\left(\overline{T} \cap E\right) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}135 = 0{,}03 + 0{,}135 = \boxed{0{,}165}.$$

3) On cherche la probabilité conditionnelle $P_E(T)$:

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}03}{0{,}165} = \frac{2}{11} \approx \boxed{0{,}18}.$$

Partie B

1) On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, la même épreuve de Bernoulli : un contrôle, dont le succès « une erreur est détectée » a pour probabilité $p = 0{,}165$. X compte le nombre de succès, donc

$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 15 \text{ et } p = 0{,}165}$.

2) Comme X suit la loi $\mathscr{B}(15\,;0{,}165)$:

$$E(X) = np = 15 \times 0{,}165 = \boxed{2{,}475}$$

$$V(X) = np(1-p) = 15 \times 0{,}165 \times 0{,}835 = \boxed{2{,}066625}.$$

3) À l'aide de la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0{,}165^5 \times 0{,}835^{10} = 3\,003 \times 0{,}165^5 \times 0{,}835^{10} \approx \boxed{0{,}06}.$$

4) On passe par l'évènement contraire, « aucune erreur n'est détectée » :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}835^{15} \approx \boxed{0{,}93}.$$

5) Avec n contrôles, le nombre d'erreurs détectées suit la loi $\mathscr{B}(n\,;0{,}165)$ et la probabilité d'au moins une erreur vaut $1-0{,}835^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $1-0{,}835^n > 0{,}99$.

La suite $(0{,}835^n)$ est décroissante car $0 < 0{,}835 < 1$, donc la suite $(1-0{,}835^n)$ est croissante : il suffit de repérer le premier rang où elle dépasse $0{,}99$. Avec le tableau de valeurs de la calculatrice :

n	24	25	26	27
$1-0{,}835^n$	$\approx 0{,}9868$	$\approx 0{,}9890$	$\approx 0{,}9908$	$\approx 0{,}9923$

$$1-0{,}835^{25} \approx 0{,}9890 < 0{,}99 \qquad \text{et} \qquad 1-0{,}835^{26} \approx 0{,}9908 > 0{,}99.$$

La caisse doit déclencher $\boxed{\text{au moins } 26 \text{ contrôles par jour}}$.

Remarque (avec le logarithme, pour ceux qui l'ont étudié).

$$\begin{aligned} 1-0{,}835^n > 0{,}99 &\iff 0{,}835^n < 0{,}01 \\ &\iff n\ln(0{,}835) < \ln(0{,}01) \quad (\ln \text{ strictement croissante}) \\ &\iff n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}835)} \quad (\text{on divise par } \ln(0{,}835) < 0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}835)} \approx 25{,}5$: on retrouve $n \geqslant 26$.

Partie C : bonus

X_1 et X_2 suivent la loi $\mathscr{B}(20\,;0{,}165)$, donc

$$E(X_1) = E(X_2) = 20 \times 0{,}165 = 3{,}3 \qquad \text{et} \qquad V(X_1) = V(X_2) = 20 \times 0{,}165 \times 0{,}835 = 2{,}7555.$$

- Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) = 3{,}3 + 3{,}3 = \boxed{6{,}6}.$$

- X_1 et X_2 sont **indépendantes**, donc les variances s'ajoutent :

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times 2{,}7555 = 5{,}511,$$

$$\sigma(S) = \sqrt{V(S)} = \boxed{\sqrt{5{,}511} \approx 2{,}35}.$$

Attention : ce sont les variances qui s'ajoutent, pas les écarts types.

Exercice 3

7,5 points

Partie A

1) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x+3$, $v'(x) = 1$, et v ne s'annule pas sur $]-3\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de $]-3\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2(x+3) - 2x \times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x}{(x+3)^2},$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}}.$$

Pour tout réel x de $]-3\,;+\infty[$, $6 > 0$ et $(x+3)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$:

$$\boxed{f \text{ est (strictement) croissante sur }]-3\,;+\infty[}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{2 \times 1}{1+3} = \dfrac{1}{2}$. On a bien $0 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1 \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Les nombres 0, u_{n+1}, u_n et 1 appartiennent à $]-3\,;+\infty[$, intervalle sur lequel f est strictement croissante. Alors :

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \\
\iff\ & f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) && (f \text{ strictement croissante}) \\
\iff\ & 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \tfrac{1}{2} && (\text{car } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \tfrac{1}{2}) \\
\implies\ & 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 && (\text{car } \tfrac{1}{2} \leqslant 1)
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}.$$

3) D'après la question 2), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante ;
- $u_n \geqslant 0$: la suite (u_n) est minorée par 0.

Toute suite décroissante et minorée converge, donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

Partie B

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 3}$, donc :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 3}{2u_n} = \frac{u_n}{2u_n} + \frac{3}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{u_n},$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2}}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}v_n + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}v_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(v_n + 1) = \frac{3}{2}w_n.$$

De plus $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$, donc $w_0 = v_0 + 1 = 2$.

$\boxed{(w_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{3}{2} \text{ et de premier terme } w_0 = 2}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$. Or $v_n = w_n - 1$ et $u_n = \dfrac{1}{v_n}$, donc :

$$v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \qquad \text{et} \qquad \boxed{u_n = \frac{1}{2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1}}.$$

Vérification : pour $n = 0$, $\dfrac{1}{2 \times 1 - 1} = 1 = u_0$; pour $n = 1$, $\dfrac{1}{2 \times \frac{3}{2} - 1} = \dfrac{1}{2} = u_1$.

4) Comme $\dfrac{3}{2} > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1\right) = +\infty$. Par quotient (inverse) :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}.$$

5) **a.** On cherche le premier rang n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$: la boucle doit tourner *tant que* $u_n > 10^{-3}$. À chaque tour, on passe au rang suivant et on calcule le terme correspondant avec la formule de la question 3).

```
1  def seuil():
2      n = 0
3      u = 1
4      while u > 10**(-3):
5          n = n+1
6          u = 1/(2*(3/2)**n - 1)
7      return n
```

Remarque : à la ligne 6, on peut aussi utiliser la relation de récurrence, `u = 2*u/(u+3)`.

b. La suite (u_n) est décroissante. À la calculatrice, en utilisant la formule de la question 3) :

$$u_{15} \approx 0{,}00114 > 10^{-3} \qquad \text{et} \qquad u_{16} \approx 0{,}00076 \leqslant 10^{-3}.$$

La fonction `seuil()` renvoie donc $\boxed{16}$.