Calculatrice autorisée

Les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire. La partie C de l'exercice 2 est un bonus.

Exercice 1

4,5 points

Dans chaque question, déterminer, si elle existe, la limite de la suite en justifiant soigneusement la réponse.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 4}$.

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = -n^2 - 4n + 3$.

3) Soit (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $a_n = (-4)^n \times 0{,}5^n$.

4) Soit (b_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par : $b_n = \dfrac{1 + \cos(n)}{1 - 2n}$.

Exercice 2

8 points

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes.

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être :

- soit total : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit partiel : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total. Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans $30\,\%$ des cas. Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans $85\,\%$ des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique. On considère les évènements suivants :

- T : « le contrôle est un contrôle total » ;
- E : « une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires de T et E.

1) Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P\left(\overline{T} \cap E\right)$.

2) Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.

3) Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2) Déterminer l'espérance et la variance de X.

3) Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

4) Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

5) On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à $99\,\%$.
Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C : bonus

Le magasin comporte deux caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée. On admet que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;0{,}165)$. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2$.

Déterminer l'espérance et l'écart type de S.

Exercice 3

7,5 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]-3\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$. On admet que f est dérivable sur $]-3\,;+\infty[$.

1) Vérifier, en détaillant les calculs, que pour tout réel x de $]-3\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$.
En déduire que f est croissante sur $]-3\,;+\infty[$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

2) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

3) En déduire que (u_n) est convergente.

Partie B

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$. On note (v_n) et (w_n) les suites définies pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ et $w_n = v_n + 1$.

1) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{3}{2}v_n + \dfrac{1}{2}$.

2) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera les paramètres.

3) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

5) **a.** Compléter le script ci-contre de telle sorte que la fonction `seuil()` renvoie le plus petit entier n tel que u_n soit inférieur ou égal à 10^{-3}.

b. Quelle est la valeur renvoyée par la fonction `seuil()` ?

```
1  def seuil():
2      n = 0
3      u = 1
4      while ........:
5          n = n+1
6          u = ........
7      return ........
```