Exercice 1

Rappel : f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (avec $h \neq 0$) tend vers un nombre réel quand h tend vers 0 ; ce réel est alors le nombre dérivé $f'(a)$.

1) $f(x) = 2\sqrt{x-3}$ et $a = 4$. La fonction f est définie pour $x - 3 \geqslant 0$, c'est-à-dire sur $[3\,;+\infty[$.
Soit h un réel non nul tel que $4 + h \geqslant 3$, c'est-à-dire $h \geqslant -1$ (ce qui est le cas pour h proche de 0). On a

$$f(4) = 2\sqrt{4-3} = 2\sqrt{1} = 2 \qquad \text{et} \qquad f(4+h) = 2\sqrt{4+h-3} = 2\sqrt{1+h}.$$

Le taux d'accroissement de f entre 4 et $4+h$ est donc

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{2\sqrt{1+h}-2}{h} = \frac{2\left(\sqrt{1+h}-1\right)}{h}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{1+h}+1$, qui n'est pas nulle (elle est supérieure ou égale à 1) :

$$\begin{aligned}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} &= \frac{2\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} \\ &= \frac{2\left((1+h)-1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} \\ &= \frac{2h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+h}+1}.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, $\sqrt{1+h}$ tend vers $\sqrt{1} = 1$, donc le taux d'accroissement tend vers $\dfrac{2}{1+1} = 1$, qui est un nombre réel : f est dérivable en 4 et

$$\boxed{f'(4) = 1}.$$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ et $a = 1$. La fonction f est définie pour $x \neq -1$.
Soit h un réel non nul tel que $1 + h \neq -1$, c'est-à-dire $h \neq -2$ (ce qui est le cas pour h proche de 0). On a

$$f(1) = \frac{2}{1+1} = 1 \qquad \text{et} \qquad f(1+h) = \frac{2}{1+h+1} = \frac{2}{2+h}.$$

On calcule d'abord la différence, puis on divise par h :

$$f(1+h) - f(1) = \frac{2}{2+h} - 1 = \frac{2-(2+h)}{2+h} = \frac{-h}{2+h},$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-h}{2+h} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{2+h}.$$

Quand h tend vers 0, $2 + h$ tend vers 2, donc le taux d'accroissement tend vers $-\dfrac{1}{2}$, qui est un

nombre réel : f est dérivable en 1 et

$$\boxed{f'(1) = -\frac{1}{2}}.$$

Vérification : pour $h = 2$, $\dfrac{f(3) - f(1)}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{2} = -\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{-1}{2+2} = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

Ici $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

1) Soit h un réel non nul. On calcule

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1,$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) + 1 = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 1 = h^2 + h - 1.$$

Le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$ est

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h^2 + h - 1 - (-1)}{h} = \frac{h^2 + h}{h} = \frac{h(h+1)}{h} = h + 1.$$

Quand h tend vers 0, $h+1$ tend vers 1, qui est un nombre réel : f est dérivable en 2 et

$$\boxed{f'(2) = 1}.$$

Vérification : pour $h = 1$, $\dfrac{f(3) - f(2)}{1} = 1 - (-1) = 2$ et $h + 1 = 2$.

2) La tangente T au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$:

$$y = 1 \times (x - 2) + (-1) \iff y = x - 2 - 1.$$

$$\boxed{T : y = x - 3}$$

Vérification : pour $x = 2$, $y = 2 - 3 = -1 = f(2)$: la droite T passe bien par le point de la courbe d'abscisse 2.

Exercice 3

1) La droite T passe par $A(-2\,;\,0)$ et $M(-3\,;\,3)$. Son coefficient directeur est

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{3 - 0}{-3 - (-2)} = \frac{3}{-1}, \qquad \boxed{m = -3}.$$

2) Le nombre dérivé de f en -2 est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse

-2, c'est-à-dire au point A. Cette tangente est T, donc

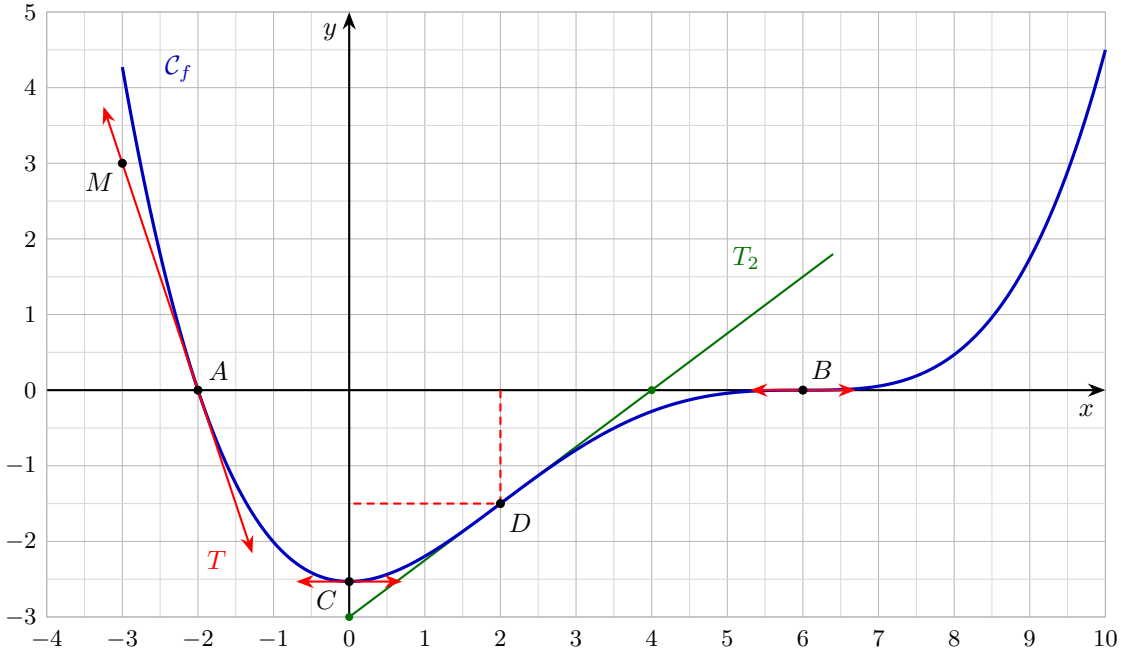
$$\boxed{f'(-2) = -3}.$$

3) Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 est D. Par lecture graphique, $D(2\,;\,-1{,}5)$, donc $f(2) = -\dfrac{3}{2}$. La tangente T_2 a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$:

$$y = \frac{3}{4}(x-2) - \frac{3}{2} \iff y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{T_2 : y = \frac{3}{4}x - 3}$$

Vérification : la droite T_2 passe par $(0\,;\,-3)$, par $D(2\,;\,-1{,}5)$ et par $(4\,;\,0)$; tracée en vert ci-dessous, elle est bien tangente à $\mathcal{C}_f$ en D.



4) Résoudre graphiquement $f'(x) = 0$, c'est chercher les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente a un coefficient directeur nul, c'est-à-dire est **parallèle à l'axe des abscisses**.

D'après le graphique, c'est le cas en exactement deux points :

- le point C, d'abscisse 0 : $f'(0) = 0$;
- le point B, d'abscisse 6 : $f'(6) = 0$ (la tangente en B est l'axe des abscisses lui-même).

Partout ailleurs, la tangente « descend » (avant C) ou « monte » (entre C et B, puis après B). L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0\,;\,6\}}.$$

Remarque : en B, la tangente est horizontale alors que f n'y admet ni minimum ni maximum ; la courbe traverse sa tangente.