Exercice 1

8 points

D'après la représentation paramétrique donnée, la droite Δ passe par le point de coordonnées $(5\,;\,3\,;\,-1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

1) Les droites sont-elles parallèles ? Un vecteur directeur de (BC) est

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-3\\0-6\\9-3\end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}.$$

S'il existait un réel λ tel que $\overrightarrow{BC}=\lambda\vec{u}$, la première coordonnée donnerait $\lambda=0$, puis la deuxième $-6=0$: impossible. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (BC) et Δ ne sont ni strictement parallèles ni confondues.

Les droites sont-elles sécantes ? La droite (BC) passe par $B(3\,;\,6\,;\,3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{BC}$: une représentation paramétrique de (BC) est

$$\begin{cases}x=3\\y=6-6k\\z=3+6k\end{cases} \quad k\in\mathbb{R}.$$

Un point commun aux deux droites correspond à des réels t et k tels que :

$$\begin{cases}5+t=3\\3-t=6-6k\\-1+3t=3+6k\end{cases} \iff \begin{cases}t=-2\\5=6-6k\\-7=3+6k\end{cases} \iff \begin{cases}t=-2\\k=\frac{1}{6}\\k=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

Les deux valeurs de k sont différentes : le système n'a pas de solution, les droites n'ont aucun point commun.

Les droites (BC) et Δ ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires :

réponse **d.** non coplanaires.

2) Les droites sont-elles parallèles ? Un vecteur directeur de (AD) est

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4-(-1)\\12-9\\-28-(-19)\end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\3\\-9\end{pmatrix}.$$

On remarque que $\overrightarrow{AD}=-3\,\vec{u}$: les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc les droites (AD) et Δ sont parallèles (strictement parallèles ou confondues).

Ont-elles un point commun ? Le point $A(-1\,;\,9\,;\,-19)$ appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases}-1=5+t\\9=3-t\\-19=-1+3t\end{cases} \iff \begin{cases}t=-6\\t=-6\\t=-6\end{cases}$$

Le système a une solution, $t = -6$, donc $A \in \Delta$.
Les droites (AD) et Δ sont parallèles et ont le point A en commun, elles sont donc confondues :

réponse **a.** confondues.

Vérification. Le point $D(-4\,;\,12\,;\,-28)$ est aussi sur Δ : on l'obtient pour $t = -9$.

Exercice 2

4 points

On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-2\\-7-(-1)\\0-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-4\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-2\\0-(-1)\\1-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}13-2\\-16-(-1)\\5-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\-15\\1\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : si $\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$, la première coordonnée donne $\lambda = -4$ et la deuxième $\lambda = -6$, ce qui est impossible. Les points A, B et C définissent donc un plan.
On cherche deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases}4a - b = 11\\-6a + b = -15\\-4a - 3b = 1\end{cases} \iff \begin{cases}b = 4a - 11\\-6a + 4a - 11 = -15\\-4a - 3b = 1\end{cases} \iff \begin{cases}b = -3\\a = 2\\-8 + 9 = 1 \text{ (vrai)}\end{cases}$$

Le système a une solution, $a = 2$ et $b = -3$:

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc

les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 3

4 points

1) $ABCD$ est un tétraèdre, donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC).

- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, donc I appartient à la droite (AB), qui est contenue dans le plan (ABC).
- J est le milieu de $[AC]$, donc J appartient à la droite (AC), qui est contenue dans le plan (ABC).

Les points I, J, B et C appartiennent tous au plan (ABC) :

les points I, J, B et C sont coplanaires.

2) D'après la question **1)**, les droites (IJ) et (BC) sont contenues dans un même plan : elles sont parallèles (strictement ou confondues) ou sécantes. On regarde si leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires en les exprimant en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

J est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}.$$

Supposons qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{BC}$. On aurait alors :

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -k\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{AC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, la décomposition est donc unique : $k = \frac{1}{3}$ et $k = \frac{1}{2}$, ce qui est impossible.

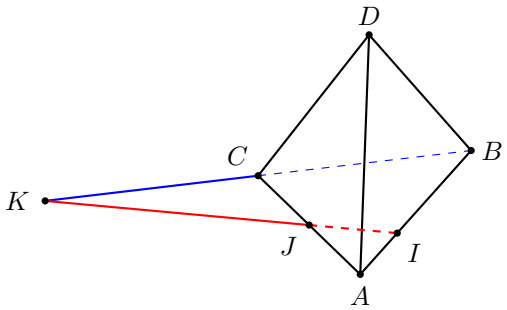
Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (IJ) et (BC) ne sont pas parallèles. Comme elles sont coplanaires,

$$\boxed{\text{les droites } (IJ) \text{ et } (BC) \text{ sont sécantes.}}$$

Remarque (non demandée). Soit K le point tel que $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BC}$: $K \in (BC)$. De plus

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = 4\,\overrightarrow{IJ},\end{aligned}$$

donc $K \in (IJ)$: les droites se coupent en K, symétrique de B par rapport à C.



Exercice 4

4 points

1) Par la relation de Chasles, puis avec $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DN}$:

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN}.$$

Il reste à montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. Comme $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}.$$

(Autrement dit, l'égalité $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BM}$ signifie que $BMNC$ est un parallélogramme.) On obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BC}}.$$

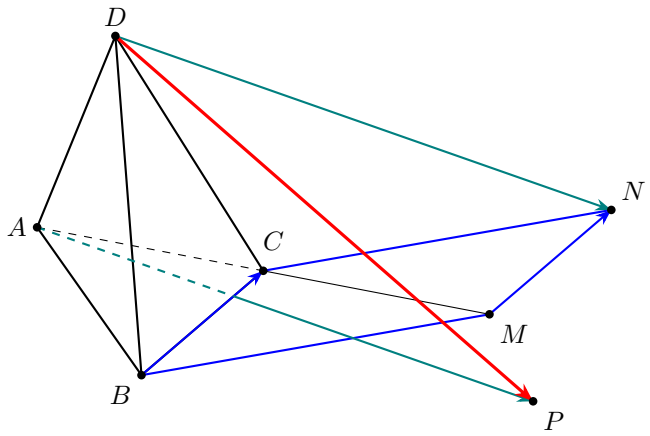


Figure de la situation : $\overrightarrow{DP}$ en rouge; $BMNC$ et $ADNP$ sont des parallélogrammes.

2) On exprime $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$, par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = 2\,\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}.$$

Or $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC}$ (le point C est le milieu de $[AM]$), donc

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Ainsi $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM} = 2\,\overrightarrow{DC}$ et, d'après la question **1)** :

$$\boxed{\overrightarrow{DP} = 2\,\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{DP}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC}$, donc

$$\boxed{\text{les vecteurs } \overrightarrow{DP},\ \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont coplanaires.}}$$