Exercice 1

12 points

1) On cherche le multiple de 9 immédiatement inférieur ou égal à $-743 : 9 \times (-83) = -747$ convient, car $9 \times (-82) = -738 > -743$. On a :

$$-743 = 9 \times (-83) + 4 \qquad \text{avec } 0 \leqslant 4 < 9.$$

Le reste de la division euclidienne de -743 par 9 est $\boxed{4}$ (et le quotient est -83).

Attention : $743 = 9 \times 82 + 5$ donne $-743 = 9 \times (-82) - 5$, mais -5 n'est pas un reste, car un reste est toujours positif ou nul.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$; le diviseur $3n + 5$ est un entier strictement positif. On remarque que

$$11n + 22 = 3(3n + 5) + 2n + 7.$$

L'entier $2n + 7$ est le reste si et seulement si $0 \leqslant 2n + 7 < 3n + 5$. On a toujours $2n + 7 \geqslant 0$, et

$$2n + 7 < 3n + 5 \iff 2 < n \iff n \geqslant 3.$$

- **Si** $n \geqslant 3$: le reste est $2n + 7$ (et le quotient est 3).
- **Si** $n \in \{0\,;\,1\,;\,2\}$: la condition n'est pas remplie, on traite chaque cas.

n	$11n + 22$	$3n + 5$	division euclidienne	reste
0	22	5	$22 = 5 \times 4 + 2$	2
1	33	8	$33 = 8 \times 4 + 1$	1
2	44	11	$44 = 11 \times 4 + 0$	0

$\boxed{\text{Le reste est } 2n + 7 \text{ si } n \geqslant 3 \text{ ; il vaut } 2 \text{ si } n = 0,\ 1 \text{ si } n = 1,\ 0 \text{ si } n = 2.}$

Vérification pour $n = 3$: $55 = 14 \times 3 + 13$ et $2 \times 3 + 7 = 13$. Pour $n \leqslant 2$, le quotient est 4 et le reste s'écrit $(11n + 22) - 4(3n + 5) = 2 - n$.

3) On raisonne par disjonction des cas selon le reste de n dans la division euclidienne par 6. Les restes modulo 6 sont :

$n \equiv \ldots\ [6]$	0	1	2	3	4	5
$n^3 \equiv \ldots\ [6]$	0	1	2	3	4	5
$3n^2 \equiv \ldots\ [6]$	0	3	0	3	0	3
$2n \equiv \ldots\ [6]$	0	2	4	0	2	4
$n^3 + 3n^2 + 2n \equiv \ldots\ [6]$	0	0	0	0	0	0

Dans tous les cas, $\boxed{n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 0\ [6]}$.

Autre méthode : $n^3 + 3n^2 + 2n = n\left(n^2 + 3n + 2\right) = n(n+1)(n+2)$ est le produit de trois entiers consécutifs. L'un au moins est pair et l'un est multiple de 3 : le produit est divisible par 2 et par 3. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, il est divisible par 6.

4) On réduit d'abord 2025 modulo 13 : $2025 = 13 \times 155 + 10$, donc

$$2025 \equiv 10 \equiv -3\ [13].$$

On cherche une puissance de -3 simple modulo 13 : $(-3)^3 = -27 = 13 \times (-2) - 1$, donc $(-3)^3 \equiv -1\ [13]$.

Or $2026 = 3 \times 675 + 1$. Les congruences étant compatibles avec les puissances et les produits :

$$\begin{aligned} 2025^{2026} &\equiv (-3)^{2026} && [13] \\ &\equiv \left((-3)^3\right)^{675} \times (-3) && [13] \\ &\equiv (-1)^{675} \times (-3) && [13] \\ &\equiv (-1) \times (-3) && [13] \quad \text{(car } 675 \text{ est impair)} \\ &\equiv 3 && [13] \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant 3 < 13$, le reste de la division euclidienne de 2025^{2026} par 13 est $\boxed{3}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

- $3^5 = 243 = 11 \times 22 + 1$, donc $3^5 \equiv 1\ [11]$, puis $3^{5n+2} = \left(3^5\right)^n \times 3^2 \equiv 1^n \times 9 \equiv 9\ [11]$;
- $10 \equiv -1\ [11]$, donc $10^2 \equiv 1\ [11]$, puis $2 \times 10^{2n} = 2 \times \left(10^2\right)^n \equiv 2 \times 1^n \equiv 2\ [11]$.

Par somme :

$$3^{5n+2} + 2 \times 10^{2n} \equiv 9 + 2 \equiv 11 \equiv 0\ [11].$$

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 3^{5n+2} + 2 \times 10^{2n} \text{ est divisible par } 11}$.

Vérification pour $n = 0$ *:* $3^2 + 2 \times 10^0 = 9 + 2 = 11$.

Exercice 2

8 points

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $u_n = 4 \times 3^n - 2$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$: $4 \times 3^0 - 2 = 4 - 2 = 2 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $P(n)$ est vraie. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} - 2$. Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & u_n = 4 \times 3^n - 2 \\ \iff\ & 3u_n = 4 \times 3^{n+1} - 6 && \text{(on multiplie par } 3\text{, et } 3 \times 3^n = 3^{n+1}\text{)} \\ \iff\ & 3u_n + 4 = 4 \times 3^{n+1} - 2 && \text{(on ajoute } 4\text{)} \\ \iff\ & u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{u_n = 4 \times 3^n - 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

2) **a.** $3^4 = 81 = 5 \times 16 + 1$, donc $3^4 \equiv 1\ [5]$. Par compatibilité avec les puissances, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$3^{4k} = \left(3^4\right)^k \equiv 1^k\ [5], \qquad \text{donc} \qquad \boxed{3^{4k} \equiv 1\ [5]}.$$

b. Tout entier naturel n s'écrit $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$ (division euclidienne de n par 4). D'après la question a. :

$$3^n = 3^{4k} \times 3^r \equiv 3^r\ [5], \qquad \text{donc} \qquad u_n = 4 \times 3^n - 2 \equiv 4 \times 3^r - 2\ [5].$$

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n \equiv \ldots\ [5]$	1	3	4	2
$4 \times 3^n \equiv \ldots\ [5]$	4	2	1	3
$u_n \equiv \ldots\ [5]$	2	0	4	1

Les restes possibles de u_n dans la division euclidienne par 5 sont $\boxed{0,\ 1,\ 2 \text{ et } 4}$ (jamais 3).

c. u_n est divisible par 5 si et seulement si $u_n \equiv 0\ [5]$. D'après le tableau, cela se produit uniquement lorsque $n = 4k + 1$:

$$\boxed{u_n \text{ est divisible par } 5 \iff n \equiv 1\ [4] \iff n = 4k + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{N}.}$$

Vérification : $u_0 = 2$, $u_1 = 10$, $u_2 = 34$, $u_3 = 106$, $u_4 = 322$ et $u_5 = 970$; parmi ces termes, seuls u_1 et u_5 sont divisibles par 5.