Calculatrice autorisée

Exercice 1

12 points

Dans cet exercice, les questions sont toutes indépendantes. Chaque réponse devra être soigneusement justifiée.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de -743 par 9.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $11n + 22$ par $3n + 5$.

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 0\ [6]$.

4) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2025^{2026} par 13.

5) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{5n+2} + 2 \times 10^{2n}$ est divisible par 11.

Exercice 2

8 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 4 \times 3^n - 2.$$

2) On souhaite déterminer tous les entiers naturels n pour lesquels u_n est divisible par 5.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $3^{4k} \equiv 1\ [5]$.

b. Déterminer les restes possibles de u_n dans la division euclidienne par 5.

c. Conclure.