Exercice 1

2 points

La somme des angles d'un triangle est égale à $180°$.

- Dans le triangle FCA : $\widehat{FCA} = 180° - 75° - 25° = \boxed{80°}$.
- Dans le triangle RDU : $\widehat{RUD} = 180° - 80° - 75° = \boxed{25°}$.

Les angles des deux triangles mesurent donc $75°$, $25°$ et $80°$:

$$\widehat{F} = \widehat{D} = 75°, \qquad \widehat{A} = \widehat{U} = 25°, \qquad \widehat{C} = \widehat{R} = 80°.$$

Les angles des triangles FCA et RDU sont deux à deux de même mesure, donc :

$$\boxed{\text{les triangles } FCA \text{ et } RDU \text{ sont semblables,}}$$

avec les sommets correspondants $F \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow U$, $C \leftrightarrow R$.

Exercice 2

3 points

Deux triangles sont semblables lorsque les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. On range les côtés de chaque triangle par ordre croissant, puis on calcule les quotients des longueurs correspondantes.

Triangle CFA	$CF = 3$ cm	$FA = 5$ cm	$CA = 7$ cm
Triangle RDU	$RD = 1{,}8$ cm	$DU = 3$ cm	$RU = 4{,}2$ cm

$$\frac{RD}{CF} = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6 \qquad \frac{DU}{FA} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \frac{RU}{CA} = \frac{4{,}2}{7} = 0{,}6$$

Les trois quotients sont égaux : les longueurs des côtés du triangle RDU sont proportionnelles à celles du triangle CFA. Donc :

$$\boxed{\text{les triangles } CFA \text{ et } RDU \text{ sont semblables,}}$$

avec $C \leftrightarrow R$, $F \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow U$.

(RDU est une réduction de CFA de rapport $\boxed{0{,}6}$; inversement, CFA est un agrandissement de RDU de rapport $\frac{3}{1{,}8} = \frac{5}{3}$.)

Exercice 3

2 points

Les points A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont alignés, et les droites (BC) et (MN) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, les longueurs des côtés du triangle ABC sont proportionnelles à celles du triangle AMN :

$$\boxed{\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}}$$

(On met au numérateur les côtés du petit triangle ABC et au dénominateur les côtés correspondants du grand triangle AMN : B correspond à M et C à N.)

Exercice 4

3 points

Hypothèses. Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Théorème de Thalès. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

Remplacement par les valeurs connues.

$$\frac{5}{4} = \frac{AC}{2{,}4} = \frac{7}{MN}$$

Calcul de MN. On utilise l'égalité $\frac{5}{4} = \frac{7}{MN}$ et le produit en croix :

$$MN = \frac{7 \times 4}{5} = \frac{28}{5} = 5{,}6$$

Donc $\boxed{MN = 5{,}6 \text{ cm}}$.

Vérification. $\frac{BC}{MN} = \frac{7}{5{,}6} = 1{,}25$ et $\frac{AB}{AM} = \frac{5}{4} = 1{,}25$: les quotients sont bien égaux.