Exercice 1

8 points

1) L'année 2021 correspond à $n = 1$ et l'année 2022 à $n = 2$.

$$u_1 = 0{,}75 \times 0{,}6 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}6) = 0{,}45 \times 0{,}91 = 0{,}4095$$

$$u_2 = 0{,}75 \times 0{,}4095 \times (1 - 0{,}15 \times 0{,}4095) \approx 0{,}28826$$

Comme u_n est exprimé en milliers, il y aurait environ $\boxed{410 \text{ individus au début de 2021}}$ et environ $\boxed{288 \text{ individus au début de 2022}}$.

2) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) = 0{,}75\,x - 0{,}1125\,x^2$. La fonction f est un polynôme, dérivable sur $[0\,;\,1]$ et :

$$f'(x) = 0{,}75 - 2 \times 0{,}1125\,x = 0{,}75 - 0{,}225\,x.$$

Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant 0{,}225\,x \leqslant 0{,}225$, donc $f'(x) \geqslant 0{,}75 - 0{,}225 = 0{,}525 > 0$.
La fonction f est donc $\boxed{\text{strictement croissante sur } [0\,;\,1]}$. De plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 0{,}75 \times 0{,}85 = 0{,}6375$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$0{,}6375$

3) Pour $x \in [0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0{,}75\,x - 0{,}1125\,x^2 - x = 0 \\ &\iff -0{,}1125\,x^2 - 0{,}25\,x = 0 \\ &\iff x\,(-0{,}1125\,x - 0{,}25) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{0{,}25}{0{,}1125} = -\frac{20}{9}. \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{20}{9} \notin [0\,;\,1]$. Dans $[0\,;\,1]$, l'équation a une seule solution : $\boxed{S = \{0\}}$.

4) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».
Initialisation. $u_0 = 0{,}6$ et $u_1 = 0{,}4095$: on a bien $0 \leqslant 0{,}4095 \leqslant 0{,}6 \leqslant 1$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Les nombres 0, u_{n+1}, u_n et 1 sont dans $[0\,;\,1]$, où f est strictement croissante (question 2)) :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \\ \iff\ & f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) && (f \text{ strictement croissante sur } [0\,;\,1]) \\ \iff\ & 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}6375 && (\text{car } u_{k+1} = f(u_k)) \\ \implies\ & 0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 && (\text{car } 0{,}6375 \leqslant 1) \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

b. D'après le a., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

5) **a.** La suite (u_n) est décroissante (4)b.) et minorée par 0 (4)a.) : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers un réel ℓ, avec $0 \leqslant \ell \leqslant 1$ car tous les termes sont dans $[0\,;\,1]$.
La fonction f est continue sur $[0\,;\,1]$ (c'est un polynôme) et $u_{n+1} = f(u_n)$; en passant à la limite, $\ell = f(\ell)$. D'après la question 3), la seule solution dans $[0\,;\,1]$ est 0, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Comme $0 < 0{,}02$, l'intervalle $]-0{,}02\,;\,0{,}02[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : il existe un rang N à partir duquel $u_n < 0{,}02$, c'est-à-dire moins de 20 individus. Le biologiste a raison : l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

b. La variable `u` part de $u_0 = 0{,}6$ et `n` de 0 ; à chaque passage dans la boucle, `u` est remplacé par le terme suivant et `n` augmente de 1 : `u` contient toujours u_n. La boucle s'arrête dès que $u_n \leqslant 0{,}02$.
À la calculatrice (ou en exécutant le programme) :

$$u_{10} \approx 0{,}0249 > 0{,}02 \qquad \text{et} \qquad u_{11} \approx 0{,}0186 \leqslant 0{,}02.$$

La fonction renvoie donc 11.
Interprétation. 11 est le premier rang n pour lequel la population est inférieure ou égale à 20 individus : selon ce modèle, l'espèce sera menacée d'extinction à partir du début de l'année $2020 + 11$, soit 2031 (environ 19 individus).

Exercice 2

6 points

1) Avec $n = 0$ puis $n = 1$ dans la relation de récurrence :

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \frac{41}{16}$$

Vérification avec le tableur : $\frac{7}{4} = 1{,}75$ et $\frac{41}{16} = 2{,}5625$.

2) **a.** La cellule B3 contient u_1, calculé à partir de u_0 (cellule B2) et de $n = 0$ (cellule A2). On peut écrire :

```
=3/4*B2+1/4*A2+1
```

(ou `=0,75*B2+0,25*A2+1`). En l'étirant vers le bas, les références deviennent B3, A3, puis B4, A4, etc.

b. Les valeurs affichées $1 < 1{,}75 < 2{,}5625 < 3{,}421875 < 4{,}31640625$ augmentent : on conjecture que la suite (u_n) est croissante.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: « $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ ».
Initialisation. $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
& n \leqslant u_n \leqslant n+1 \\
\iff & \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} && \text{(on multiplie par } \tfrac{3}{4} > 0\text{)} \\
\iff & n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{7}{4} && \text{(on ajoute } \tfrac{1}{4}n+1\text{)} \\
\iff & n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} \\
\implies & n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2 && \text{(car } \tfrac{7}{4} \leqslant 2\text{)}
\end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{n \leqslant u_n \leqslant n+1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\
&= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 \\
&= \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n \\
&= \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n.
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc $\boxed{\text{géométrique de raison } \frac{3}{4}}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 1$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Comme $u_n = v_n + n$:

$$\boxed{u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n.}$$

Vérification : $u_1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ et $u_2 = \frac{9}{16} + 2 = \frac{41}{16}$.

Exercice 3

6 points

1) Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, l'abscisse du sommet est

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = 1 - 2 - 3 = -4.$$

Le sommet de P est $\boxed{S(-1\,;\,-4)}$.
(On le retrouve avec la forme canonique : $f(x) = (x+1)^2 - 4$.)

2) **a.** $g(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$ et $g(2) = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.
Donc $\boxed{-3 \text{ et } 2 \text{ sont racines de } g}$, et $g(x) = (x+3)(x-2)$.

b. g est un polynôme du second degré de coefficient $a = 1 > 0$: il est du signe de a (positif) à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Pour tout réel x :

$$f(x) - h(x) = x^2 + 2x - 3 - (x+3) = x^2 + 2x - 3 - x - 3 = x^2 + x - 6 = g(x).$$

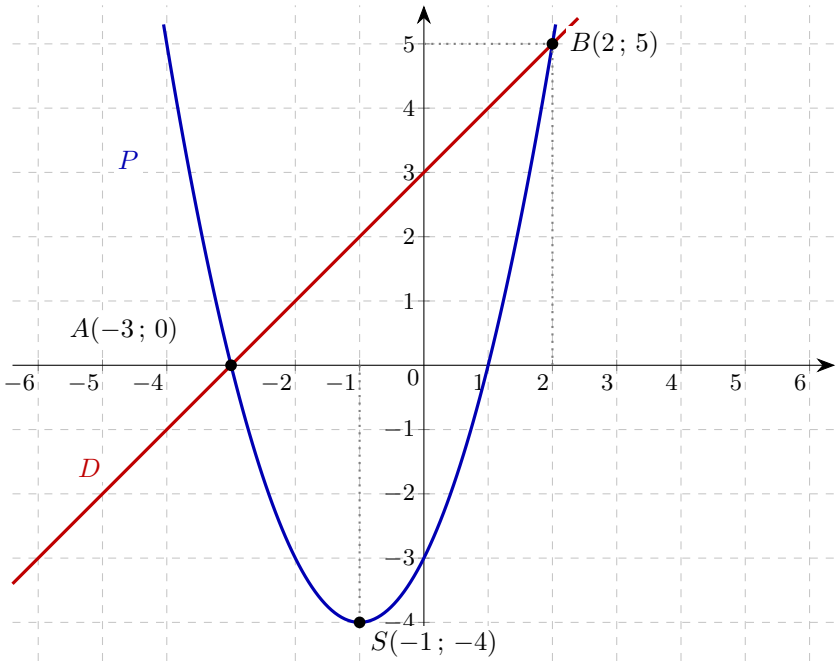
Donc $\boxed{f(x) - h(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$.

4) La position relative de P et D est donnée par le signe de $f(x) - h(x) = g(x)$ (question 2)b.) :

- sur $]-\infty\,;\,-3[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$: $\boxed{P \text{ est au-dessus de } D}$;
- sur $]-3\,;\,2[$, $g(x) < 0$: $\boxed{P \text{ est en dessous de } D}$;
- en $x = -3$ et $x = 2$, $g(x) = 0$: les courbes se coupent.

Ordonnées : $h(-3) = -3 + 3 = 0$ et $h(2) = 2 + 3 = 5$ (on vérifie $f(-3) = 9 - 6 - 3 = 0$ et $f(2) = 4 + 4 - 3 = 5$).
Les points d'intersection sont $\boxed{A(-3\,;\,0)}$ et $\boxed{B(2\,;\,5)}$.

5) On place le sommet $S(-1\,;\,-4)$ et les points d'intersection $A(-3\,;\,0)$ et $B(2\,;\,5)$; P est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$ et coupe aussi l'axe des abscisses en $x = 1$; D passe par A et B.



On lit sur le schéma : P au-dessus de D à gauche de A et à droite de B, en dessous entre A et B.