Calculatrice autorisée

Exercice 1

8 points

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_{n+1} = 0{,}75\,u_n\,(1 - 0{,}15\,u_n) \end{cases}$$

où, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1) Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 0{,}75\,x\,(1 - 0{,}15\,x)$.

2) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.

3) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4) **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5) Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction `menace()` ci-contre.

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
1  def menace():
2      u = 0.6
3      n = 0
4      while u > 0.02:
5          u = 0.75*u*(1-0.15*u)
6          n = n+1
7      return n
```

Exercice 2

6 points

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}\,u_n + \frac{1}{4}\,n + 1.$$

1) Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2) **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

4) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 3

6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+2x-3$. La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal se note P.

1) La courbe P est une parabole. Déterminer les coordonnées de son sommet.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + x - 6$.

a. Justifier que -3 et 2 sont racines de la fonction g.

b. Déterminer le tableau de signes de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x + 3$. La courbe représentative de la fonction h se note D.
Vérifier que, pour tout réel x, on a $f(x) - h(x) = g(x)$.

4) En déduire la position relative des courbes P et D. On déterminera les coordonnées des éventuels points d'intersection.

5) Réaliser un schéma donnant l'allure des courbes P et D sur lequel figureront les résultats établis à la question 1) et à la question 4).

