Exercice 1

6 points

$f(x) = 4x^2 - 16x - 9$: trinôme avec $a = 4$, $b = -16$, $c = -9$.

1) La forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{2 \times 4} = 2 \qquad \text{et} \qquad \beta = f(2) = 4 \times 4 - 16 \times 2 - 9 = 16 - 32 - 9 = -25.$$

Donc, pour tout réel x, $\boxed{f(x) = 4(x-2)^2 - 25}$.

Autre méthode : $4x^2 - 16x - 9 = 4\left(x^2 - 4x\right) - 9 = 4\left[(x-2)^2 - 4\right] - 9 = 4(x-2)^2 - 16 - 9 = 4(x-2)^2 - 25$.

2) On développe : pour tout réel x,

$$(2x-9)(2x+1) = 4x^2 + 2x - 18x - 9 = 4x^2 - 16x - 9 = f(x).$$

Donc, pour tout réel x, $\boxed{f(x) = (2x-9)(2x+1)}$.

Autre méthode : à partir de la forme canonique, $4(x-2)^2 - 25 = [2(x-2)]^2 - 5^2 = (2x-4-5)(2x-4+5) = (2x-9)(2x+1)$.

3) On dispose de trois formes de $f(x)$: développée $4x^2-16x-9$, canonique $4(x-2)^2-25$, factorisée $(2x-9)(2x+1)$.

a. Forme développée : $f(0) = 4 \times 0^2 - 16 \times 0 - 9$, donc $\boxed{f(0) = -9}$.

b. Forme canonique : $f(2) = 4(2-2)^2 - 25 = 4 \times 0 - 25$, donc $\boxed{f(2) = -25}$.

c. Forme factorisée : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

$$(2x-9)(2x+1) = 0 \iff 2x - 9 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0 \iff x = \frac{9}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{9}{2}\right\}}$$

d. Forme développée :

$$\begin{aligned} f(x) = -9 &\iff 4x^2 - 16x - 9 = -9 \\ &\iff 4x^2 - 16x = 0 && \text{on ajoute } 9 \\ &\iff 4x(x-4) = 0 && \text{on factorise par } 4x \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \{0\,;4\}}$

Vérification : $f(4) = 64 - 64 - 9 = -9$.

e. Forme canonique : pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$ (un carré est positif), donc

$$4(x-2)^2 \geqslant 0 \quad \text{puis} \quad 4(x-2)^2 - 25 \geqslant -25.$$

Ainsi, pour tout réel x, $\boxed{f(x) \geqslant -25}$, avec égalité pour $x = 2$: -25 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

6 points

1) $f(x) = (3x-2)^2 - (4x-1)^2$.

Affirmation 1. $f(-2) = (3\times(-2)-2)^2 - (4\times(-2)-1)^2 = (-8)^2 - (-9)^2 = 64 - 81 = -17$.

L'affirmation 1 est $\boxed{\text{vraie}}$.

Affirmation 2. On reconnaît $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ avec $A = 3x-2$ et $B = 4x-1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= [(3x-2)-(4x-1)]\,[(3x-2)+(4x-1)] \\ &= (3x-2-4x+1)(3x-2+4x-1) \\ &= (-x-1)(7x-3) \\ &= -(x+1)(7x-3) = (x+1)(-7x+3). \end{aligned}$$

L'affirmation 2 est $\boxed{\text{vraie}}$.

Vérification : les deux expressions se développent en $-7x^2 - 4x + 3$.

2) Affirmation 3. On regroupe tous les termes dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 1 = 4x^2 - 6x + 2 &\iff x^2 + 4x - 1 - 4x^2 + 6x - 2 = 0 \\ &\iff -3x^2 + 10x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Les deux équations ont les mêmes solutions : l'affirmation 3 est $\boxed{\text{vraie}}$.

Affirmation 4. On résout $-3x^2 + 10x - 3 = 0$: $a = -3$, $b = 10$, $c = -3$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4\times(-3)\times(-3) = 100 - 36 = 64 > 0, \qquad \sqrt{64} = 8.$$

$$x_1 = \frac{-10-8}{2\times(-3)} = \frac{-18}{-6} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-10+8}{2\times(-3)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Les deux solutions 3 et $\dfrac{1}{3}$ sont strictement positives : elles sont de même signe. L'affirmation 4 est $\boxed{\text{fausse}}$.

Remarque : le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a} = \dfrac{-3}{-3} = 1 > 0$, ce qui suffit à conclure qu'elles sont de même signe.

3) Affirmation 5. $f(-3) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$: -3 et $\dfrac{1}{2}$ sont les deux racines de f. Sa forme factorisée est donc

$$f(x) = a(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Avec $f(3) = 10$:

$$a(3+3)\left(3-\frac{1}{2}\right) = 10 \iff a\times 6\times\frac{5}{2} = 10 \iff 15a = 10 \iff a = \frac{2}{3}.$$

$a = \dfrac{2}{3} \neq -4$: l'affirmation 5 est fausse.

Contre-vérification : avec $a = -4$, on aurait $f(3) = -4 \times 15 = -60 \neq 10$.

Affirmation 6. On développe : $f(x) = \dfrac{2}{3}\left(x^2 + \dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x - 1$, donc $b = \dfrac{5}{3}$ et $c = -1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{2}{3} \times (-1) = \frac{25}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9} + \frac{24}{9} = \frac{49}{9}.$$

L'affirmation 6 est vraie.

Vérification : $\sqrt{\Delta} = \dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{-\frac{5}{3} \pm \frac{7}{3}}{\frac{4}{3}}$ donne bien $\dfrac{1}{2}$ et -3.

Exercice 3

3 points

$\mathcal{C}_f$ passe par un point $(x_0\,;y_0)$ si et seulement si $f(x_0) = y_0$.

- $(0\,;-6) \in \mathcal{C}_f$: $f(0) = c = -6$.
- $(1\,;-2) \in \mathcal{C}_f$: $a + b + c = -2$, soit $a + b = 4$.
- $(4\,;-2) \in \mathcal{C}_f$: $16a + 4b + c = -2$, soit $16a + 4b = 4$, c'est-à-dire $4a + b = 1$.

On résout le système :

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a = -3 \\ b = 4 - a \end{cases} \quad (L_2 - L_1) \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 5. \end{cases}$$

Donc $a = -1$, $b = 5$, $c = -6$ et, pour tout réel x, $\boxed{f(x) = -x^2 + 5x - 6}$.

Vérification : $f(1) = -1 + 5 - 6 = -2$; $f(0) = -6$; $f(4) = -16 + 20 - 6 = -2$.

Remarque : $f(1) = f(4)$, donc l'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2} = -\dfrac{b}{2a}$, ce qui est cohérent.

Exercice 4

5 points

1) $M \in [AB]$ avec $AM = x$: il faut $0 \leqslant x \leqslant 10$. $N \in [BC]$ avec $BN = 2x$: il faut $0 \leqslant 2x \leqslant 10$, soit $0 \leqslant x \leqslant 5$.
Les deux conditions sont réalisées pour $\boxed{I = [0\,;5]}$.

2) Le triangle MBN est rectangle en B (angle du carré), avec $MB = AB - AM = 10 - x$ et $BN = 2x$. Pour tout $x \in I$:

$$\mathcal{A}_{MBN} = \frac{MB \times BN}{2} = \frac{(10-x) \times 2x}{2} = x(10-x) = 10x - x^2.$$

Donc, pour tout $x \in I$, $\boxed{\mathcal{A}_{MBN} = -x^2 + 10x}$.

3) On résout, pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} -x^2 + 10x = 9 &\iff -x^2 + 10x - 9 = 0 \\ &\iff x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \text{on multiplie par } -1. \end{aligned}$$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 100 - 36 = 64 > 0$ et $\sqrt{64} = 8$:

$$x_1 = \frac{10-8}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{10+8}{2} = 9.$$

$9 \notin I = [0\,;5]$: on l'écarte. L'aire de MBN vaut 9 pour $\boxed{x = 1}$.
Vérification : pour $x = 1$, $MB = 9$, $BN = 2$ et $\dfrac{9 \times 2}{2} = 9$.

4) Le triangle DCN est rectangle en C, avec $DC = 10$ et $CN = BC - BN = 10 - 2x$. Pour tout $x \in I$:

$$\mathcal{A}_{DCN} = \frac{DC \times CN}{2} = \frac{10(10-2x)}{2} = 5(10-2x) = 50 - 10x.$$

Donc, pour tout $x \in I$, $\boxed{\mathcal{A}_{DCN} = -10x + 50}$.

5) On résout, pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} -x^2 + 10x = -10x + 50 &\iff -x^2 + 20x - 50 = 0 \\ &\iff x^2 - 20x + 50 = 0 \quad \text{on multiplie par } -1. \end{aligned}$$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 50 = 400 - 200 = 200 > 0$ et $\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2}$:

$$x_1 = \frac{20 - 10\sqrt{2}}{2} = 10 - 5\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{20 + 10\sqrt{2}}{2} = 10 + 5\sqrt{2}.$$

- $x_2 = 10 + 5\sqrt{2} > 10 > 5$: $x_2 \notin I$, on l'écarte.
- $1 < \sqrt{2} < 2$, donc $5 < 5\sqrt{2} < 10$, puis $0 < 10 - 5\sqrt{2} < 5$: $x_1 \in I$.

Les deux aires sont égales pour une seule valeur : $\boxed{x = 10 - 5\sqrt{2}}$ ($a = 10$, $b = -5$, $c = 2$).
Vérification : pour cette valeur, les deux aires valent $50\sqrt{2} - 50$ (environ $20{,}7$).