Exercice 1

7 points

Partie A

Aucune justification n'était demandée; on les donne ici pour comprendre. Pour les vérifications, on peut se placer dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$: $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$, $H(0\,;\,1\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et $K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$.

1) H et K appartiennent au plan (EFG) de la face du dessus, A et C au plan (ABC) de la face du dessous; ces deux plans sont strictement parallèles, donc les droites (HK) et (AC) n'ont aucun point commun.
Elles ne sont pas parallèles pour autant : K est le milieu de la diagonale $[EG]$ du carré $EFGH$, donc aussi le milieu de l'autre diagonale $[HF]$; ainsi $(HK) = (HF)$, qui est parallèle à (DB) et non à (AC) (les diagonales d'un carré ne sont pas parallèles).
Deux droites sans point commun et non parallèles ne sont pas coplanaires : réponse **b.** non coplanaires.

2) $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($ACGE$ est un rectangle), donc $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: les droites sont parallèles. Comme $E \notin (AC)$, elles ne sont pas confondues.
Réponse **a.** strictement parallèles.

3) E, F et K sont trois points non alignés de la face $EFGH$: le plan (EFK) est le plan (EFG). De même, H, G, E sont non alignés et $(HGE) = (EFG)$.
Réponse **d.** confondus.

4) On a vu que K est le milieu de $[HF]$: $K \in (HF) \subset (AHF)$, et $A \in (AHF)$, donc la droite (AK) est contenue dans le plan (AHF).
Les droites (AK) et (CE) sont toutes deux dans le plan $(ACGE)$ et ne sont pas parallèles : elles sont sécantes. Leur point commun est sur (CE) et dans le plan (AHF) (puisqu'il est sur (AK)) : c'est le point L.
Réponse **a.** (CE) et (AK).
Vérification. Avec les coordonnées, (AHF) a pour équation $x + y - z = 0$ et l'on trouve $L\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$, soit $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$. Les autres droites coupent (CE) ailleurs ou pas du tout : (AG) en $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ (centre du cube), (IK) en $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right)$, et (IF) ne la rencontre pas.

5) Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$, et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Donc

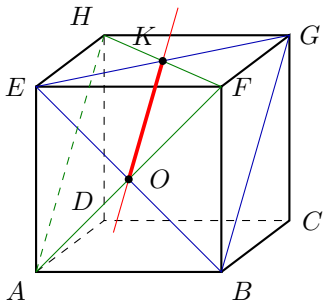
$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Réponse **b.**
Vérification. $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ alors que la proposition **a.** donne $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{3}{2}\right)$, **c.** donne $\overrightarrow{BG}(0\,;\,1\,;\,1)$ et **d.** donne $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Partie B

Pour construire l'intersection de deux plans distincts, on cherche deux points communs aux deux plans.

- **Les plans sont distincts** : $A \in (HAF)$ mais $A \notin (EBG)$: sinon le plan (EBG) contiendrait A, B et E, il serait le plan (ABE) de la face $ABFE$, qui ne contient pas G.
- **Premier point, K.** K est le milieu de $[EG]$, donc $K \in (EG) \subset (EBG)$. C'est aussi le milieu de $[HF]$ (les diagonales du carré $EFGH$ ont le même milieu), donc $K \in (HF) \subset (HAF)$.
- **Deuxième point, O, centre de la face $ABFE$.** Les diagonales $[EB]$ et $[AF]$ du carré $ABFE$ se coupent en leur milieu O. Donc $O \in (EB) \subset (EBG)$ et $O \in (AF) \subset (HAF)$.



Les deux plans, distincts et sécants, se coupent selon une droite qui passe par K et O :

$$\boxed{(EBG) \cap (HAF) = (OK)}.$$

Remarque. $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$: la droite (OK) est parallèle à (AH), ce qui permet de contrôler le tracé. Figure : segment $[OK]$ en rouge, triangles EBG en bleu et HAF en vert.

Exercice 2

3 points

Coplanarité. E est défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$: E appartient à la droite (AC), donc au plan (ABC).

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$ signifie que B est le milieu de $[CF]$: F appartient à la droite (BC), donc au plan (ABC).

Les quatre points A, F, B et E sont dans le plan (ABC) :

$$\boxed{\text{les droites } (AF) \text{ et } (BE) \text{ sont coplanaires (contenues dans le plan } (ABC)).}$$

Sécantes. Exprimons les vecteurs directeurs dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ du plan (ABC) (les points A, B, C ne sont pas alignés puisque $ABCD$ est un tétraèdre). Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

S'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{AF} = k\,\overrightarrow{BE}$, l'unicité de la décomposition dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ donnerait $2 = -k$ et $-1 = \frac{1}{3}k$, soit $k = -2$ et $k = -3$: impossible. Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AF) et (BE) ne sont pas parallèles. Deux droites coplanaires et non parallèles sont sécantes :

$$\boxed{\text{les droites } (AF) \text{ et } (BE) \text{ sont sécantes.}}$$