Correction Exercice 1 (3 points)

Objectif : Utiliser la décomposition vectorielle pour prouver le parallélisme droite-plan.

Dans le cube $ABCDEFGH$, on considère la base $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE})$.

1. **Démonstration de l'égalité vectorielle :**

   On cherche à exprimer $\overrightarrow{HM}$ en fonction des vecteurs de base, puis à vérifier l'égalité.

   - $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

     Donc : $\boxed{\overrightarrow{HM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}}$.
   - Calculons $\overrightarrow{GJ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GE}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GJ} &= \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

     De plus, $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

     Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GJ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GE} &= \left(-\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)\\ &= -\overrightarrow{AE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

   On retrouve bien l'expression de $\overrightarrow{HM}$. On a donc montré que :

$$\boxed{\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{GJ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GE}}$$

2. **Position relative de la droite (HM) et du plan (EGJ) :**

   L'égalité précédente montre que le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{GE}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{GE}$ ne sont pas colinéaires (ils définissent le plan (EGJ)).

   Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est coplanaire aux vecteurs directeurs du plan (EGJ).

   Conclusion : La droite (HM) est **parallèle** au plan (EGJ).

Correction Exercice 2 (5 points)

Objectif : Alignement de points et intersection plans/droites.

1. (a) **Construction de L :** L est le symétrique de H par rapport à G, donc $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GL}$. Comme $ABCDEFGH$ est un cube, $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$. On reporte donc la longueur AB à partir de G. (Voir figure).

   (b) **Alignement de E, K, L :** Exprimons $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EL}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

   - K est le milieu de $[FG]$, donc $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

   $$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

   - L est défini par $\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{AB}$.

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{EL} &= \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GL} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

   On remarque que $\overrightarrow{EL} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = 2\overrightarrow{EK}$.

   Les vecteurs sont colinéaires, donc **les points** E, K **et** L **sont alignés**.

2. (a) **Intersection de (IJ) et (EH) :** Les points I, J, E, H appartiennent tous au plan de la face $(ADHE)$ (car $I \in [AD]$ et $J \in [AE]$). Les droites (IJ) et (EH) sont donc coplanaires. De plus, (IJ) n'est pas parallèle à (EH) (sinon I et J seraient à la même "hauteur" ou distance, ce qui n'est pas le cas). Elles sont donc sécantes en un point P.

   (b) **Intersection des plans (IJK) et (EFG) :**

   - Le point K appartient au plan (IJK) (par définition) et au plan (EFG) (car $K \in [FG]$).
   - Le point P appartient à la droite (IJ), donc au plan (IJK). Il appartient aussi à la droite (EH), qui est incluse dans le plan (EFG) (ou le plan du haut). Donc $P \in (EFG)$.

   L'intersection des deux plans est la droite passant par les points communs P et K.

   Conclusion : L'intersection est la droite (PK).

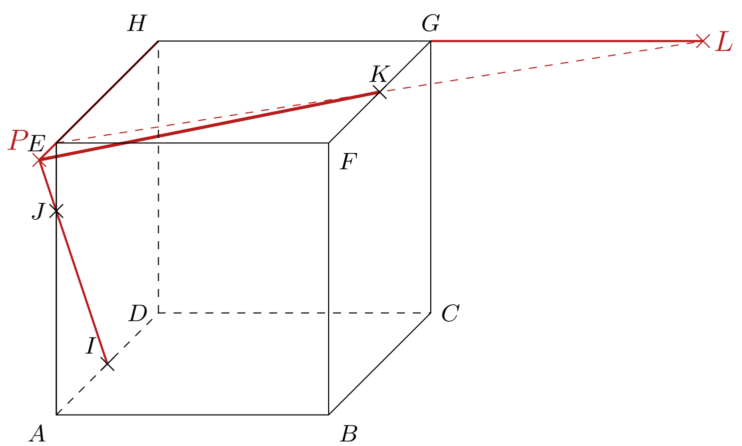


FIGURE 1 – Construction des points L, P et de l'intersection (PK).

Correction Exercice 3 (5 points)

1. **Placement des points :** Voir figure ci-dessous.
2. **Nature des quadrilatères :**
   - **Pour** $MCEF$ **:** Dans le triangle ABC, E est le milieu de $[AB]$ et F est le milieu de $[AC]$. D'après le théorème des milieux, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On sait par ailleurs que $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On a donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CM}$. **Conclusion :** $MCEF$ est un **parallélogramme**.
   - **Pour** $ADEN$ **:** L'énoncé donne directement $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DE}$. **Conclusion :** $ADEN$ est un **parallélogramme**.
3. **Démonstration de l'égalité :** On calcule $\overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF}$.

   Comme $ADEN$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{EA}$. Comme F est le milieu de $[AC]$, $2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ (règle du parallélogramme ou décomposition).

   Ainsi :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{EA} - (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \\
&= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CD} \quad \text{(Chasles } E \to A \to D\text{)}
\end{aligned}$$

   Cette voie est complexe. Essayons une autre méthode plus directe via la relation vectorielle cible $\overrightarrow{CE}$:

   $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{EA}$ (car $ADEN$ parallélogramme). $2\overrightarrow{DF} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$.

   $\overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$.

   Calculons maintenant $\overrightarrow{CE}$: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$.

   Il y a une erreur de signe classique. Reprenons simplement : $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{EA}$. Or $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}$. Et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED}$.

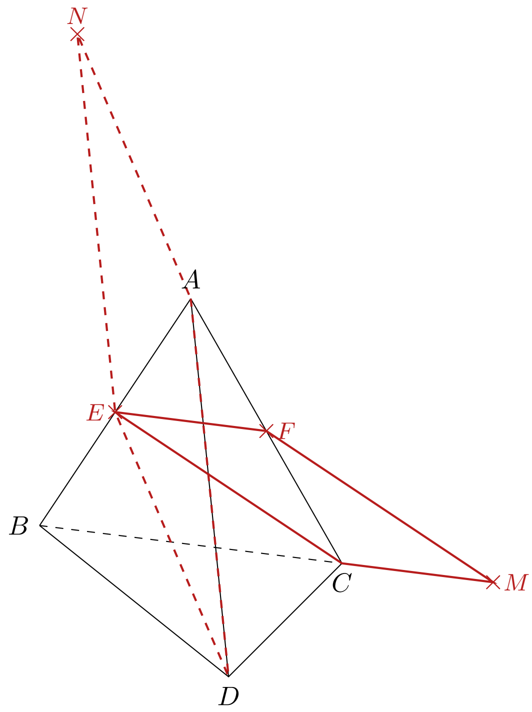
   Repartons de $\overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE}$. Nous savons que $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{EA}$. $MCEF$ parallélogramme $\implies \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MF}$.

   Méthode par décomposition en D **:** $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE}$. $2\overrightarrow{DF} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$.

   Soustraction : $(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE})-(2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE}$.

   Conclusion : On a bien $\boxed{\overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE}}$.
4. **Position relative :** L'égalité $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF}$ exprime le vecteur $\overrightarrow{CE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DF}$.

   Ces deux vecteurs dirigent le plan (DNF). **Conclusion :** La droite (CE) est **parallèle** au plan (DNF).



Correction Exercice 4 (6 points)

Construction de la section du pavé par le plan (IJK).

1. **Face** $ABCD$ **:** Les points I et J appartiennent au plan de la face inférieure. L'intersection est le segment $[\mathbf{IJ}]$.
2. **Intersection** $L = (IJ) \cap (AD)$ **:** Dans le plan $(ABCD)$, les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles (sinon $ABCD$ serait un parallélogramme où I, J milieux impliqueraient $(IJ)//(AC)$, or (AC) n'est pas parallèle à (AD)). Elles se coupent en un point L.
3. **Face** $AEHD$ **:** Le point L appartient à (AD), donc au plan $(AEHD)$. Le point K appartient à $[EH]$, donc au plan $(AEHD)$. L'intersection du plan (IJK) avec cette face est portée par la droite (LK). Cette droite coupe l'arête $[AE]$ en un point que l'on nomme M. La section sur cette face est le segment $[\mathbf{KM}]$.
4. **Face** $ABFE$ **:** Nous avons obtenu le point M sur $[AE]$ et le point I sur $[AB]$. Ces deux points sont sur la face avant. La section est le segment $[\mathbf{MI}]$.
5. **Face** $EFGH$ **:** Le plan $(EFGH)$ est parallèle au plan $(ABCD)$. D'après le **théorème du toit** (ou des plans parallèles) : si un plan coupe deux plans parallèles, alors les droites d'intersection sont parallèles. Le plan (IJK) coupe $(ABCD)$ selon (IJ). Il coupe donc $(EFGH)$ selon une droite passant par K et parallèle à (IJ). On trace la parallèle à (IJ) passant par K. Elle coupe l'arête $[GH]$ en un point N. La section est le segment $[\mathbf{KN}]$.
6. **Face** $CDHG$ **:** Nous avons les points N (sur GH) et J (sur BC, donc on peut relier... attention J est sur BC). En réalité, il faut fermer la section. Le point N est sur la face arrière, le point J est connecté via la face droite. La parallèle tracée précédemment donne N. Sur la face arrière $CDHG$, la section relie N à... il nous manque un point ?

Vérifions la fermeture : La section est le polygone $I - J - R - N - K - M$. Ici, la parallèle à (IJ) passant par K coupe $[GH]$ en N. Mais (IJ) coupe aussi (CD) (le prolongement). Plus simplement : Le plan coupe la face $BCGF$?

7. **Face** $BCGF$ **et** $CDHG$ **:** Relions les points restants pour fermer la section polygonale. Nous avons N sur $[GH]$ et J sur $[BC]$. Le segment $[\mathbf{NJ}]$. Vérifions si c'est plan : $(KN)//(IJ)$ assure la planéité.

   Récapitulatif de la section (pentagone) : $[IJ] - [JN] - [NK] - [KM] - [MI]$. *Note : selon les dimensions exactes, N peut tomber sur $[CG]$, ici il tombe sur $[GH]$.*