Correction Exercice 1

Objectif : Démontrer la coplanarité de trois vecteurs par combinaison linéaire.

On travaille dans le cube $ABCDEFGH$. La famille de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ constitue une base de l'espace (car ces vecteurs ne sont pas coplanaires).

Les données sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE} \end{cases}$$

1. **Recherche des réels a et b :**

   Nous cherchons a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

   Substituons les expressions en fonction de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

   $$3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE} = a(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}) + b(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE})$$

   Factorisons par les vecteurs de base à droite :

   $$3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE} = (a+b)\overrightarrow{AB} + (a-b)\overrightarrow{AD} + (2a-2b)\overrightarrow{AE}$$

   Par identification des coefficients (unicité de l'écriture dans une base), nous obtenons le système suivant :

   $$\begin{cases} a + b = 3 \quad (L_1) \\ a - b = -1 \quad (L_2) \\ 2a - 2b = -2 \quad (L_3) \end{cases}$$

   La ligne (L_3) est équivalente à $2(a-b) = -2 \iff a - b = -1$, ce qui est identique à (L_2). Nous résolvons le système formé par (L_1) et (L_2) :

   En additionnant (L_1) et (L_2) : $2a = 2 \iff a = 1$.

   En soustrayant (L_2) à (L_1) : $2b = 4 \iff b = 2$.

   On vérifie : $1\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}) + (2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AE}) = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{w}$.

   Conclusion : Les réels cherchés sont $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 2}$.

2. **Déduction de la coplanarité :**

   D'après la question précédente, nous avons établi la relation vectorielle :

   $$\boxed{\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}}$$

   Le vecteur $\overrightarrow{w}$ s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

   Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires**.

Correction Exercice 2

Objectif : Utiliser la décomposition de vecteurs pour prouver le parallélisme droite-plan.

Dans le pavé droit $ABCDEFGH$, on utilise les égalités vectorielles issues de la géométrie du pavé (ex : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, etc.).

1. **Expression des vecteurs en fonction de la base** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ **:**

   - **Pour $\overrightarrow{AK}$:** On utilise la relation de Chasles en passant par F (car K est sur $[FG]$) :

     $$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) + \overrightarrow{FK}$$

     Or $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. Donc : $\boxed{\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}$

   - **Pour $\overrightarrow{IH}$:** On passe par D (car I est sur $[AD]$) :

     $$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DH}$$

     Comme $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{ID} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. De plus $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$. Donc : $\boxed{\overrightarrow{IH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}$

   - **Pour $\overrightarrow{IJ}$:** On décompose par A puis B :

     $$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$$

     On sait que $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

     $$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

     Les termes en $\overrightarrow{AD}$ s'annulent : $\boxed{\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}}$

2. **Démonstration de l'égalité vectorielle :**

   Calculons la somme $\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IJ}$ à l'aide des expressions trouvées précédemment :

   $$\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IJ} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) + \overrightarrow{AB}$$

   En réordonnant les termes :

   $$\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

   On reconnait exactement l'expression de $\overrightarrow{AK}$ établie en question 1.

   Conclusion : On a bien $\boxed{\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IJ}}$.

3. **Position relative de la droite** (AK) **et du plan** (IJH) **:**

   Les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires. En effet, dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

   - $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(1\,;\,0\,;\,0)$.

- $\overrightarrow{IH}$ a pour coordonnées $(0\,;\,0{,}75\,;\,1)$.

Il n'existe aucun réel k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IH}$ (le coefficient sur $\overrightarrow{AB}$ est non nul pour l'un et nul pour l'autre). Ils définissent donc bien le plan (IJH).

La relation $\overrightarrow{AK} = 1 \cdot \overrightarrow{IH} + 1 \cdot \overrightarrow{IJ}$ montre que le vecteur directeur $\overrightarrow{AK}$ de la droite (AK) est une combinaison linéaire des vecteurs directeurs du plan (IJH).

Cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{AK}$ est coplanaire aux vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

Conclusion : La droite (AK) est **parallèle** au plan (IJH).

Point bonus : Montrer que le parallélisme est strict.

Pour que le parallélisme soit strict, la droite (AK) ne doit pas être incluse dans le plan (IJH). Il suffit de montrer qu'un point de la droite, par exemple le point A, n'appartient pas au plan (IJH).

Si $A \in (IJH)$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ seraient coplanaires. Testons s'il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{IH} + y\overrightarrow{IJ}$.

Exprimons ces vecteurs dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

- $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
- $x\overrightarrow{IH} + y\overrightarrow{IJ} = x\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) + y(\overrightarrow{AB}) = y\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AE}$

L'égalité $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{IH} + y\overrightarrow{IJ}$ implique par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 0 = y \quad (\text{selon } \overrightarrow{AB}) \\ 1/4 = \dfrac{3}{4}x \quad (\text{selon } \overrightarrow{AD}) \\ 0 = x \quad (\text{selon } \overrightarrow{AE}) \end{cases}$$

Les deux dernières lignes donnent une contradiction ($x = 1/3$ et $x = 0$). Ce système n'a pas de solution.

Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas coplanaires. Le point A n'appartient pas au plan (IJH), donc **le parallélisme est strict**.