Exercice 1

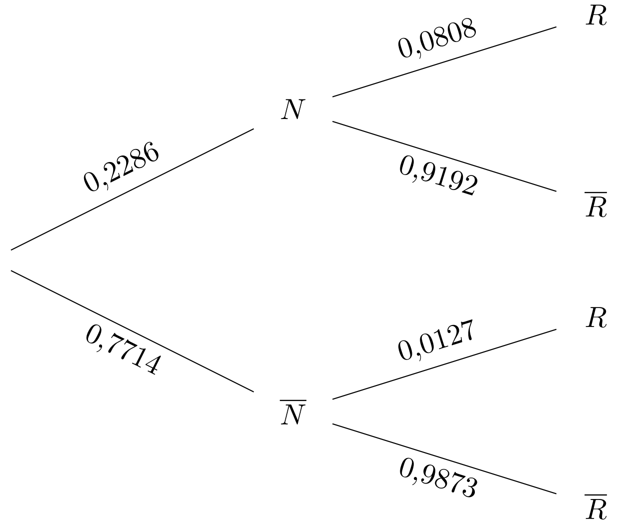
Partie A

1. **Arbre pondéré :**

   D'après l'énoncé :

   - $22{,}86\,\%$ des véhicules sont neufs, donc $P(N) = 0{,}2286$.
     Par conséquent, $P(\overline{N}) = 1 - 0{,}2286 = 0{,}7714$.
   - $8{,}08\,\%$ des véhicules neufs sont hybrides rechargeables, donc $P_N(R) = 0{,}0808$.
   - $1{,}27\,\%$ des véhicules d'occasion sont hybrides rechargeables, donc $P_{\overline{N}}(R) = 0{,}0127$.

<u>Arbre</u> :



2. **Probabilité que le véhicule soit neuf et hybride rechargeable :**

   On cherche $P(N \cap R)$. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R) = 0{,}2286 \times 0{,}0808$$

$$P(N \cap R) \approx 0{,}01847088$$

   En arrondissant au dix-millième :

$$\boxed{P(N \cap R) \approx 0{,}0185}$$

3. **Démontrer que** $P(R) \approx 0{,}0283$ **:**

   Les évènements N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(N \cap R) + P(\overline{N} \cap R)$$

Calculons d'abord $P(\overline{N} \cap R)$:

$$P(\overline{N} \cap R) = P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(R) = 0{,}7714 \times 0{,}0127 \quad (\approx 0{,}00979678)$$

Ainsi :

$$P(R) = 0{,}7714 \times 0{,}0127 + 0{,}7714 \times 0{,}0127 \approx 0{,}02826766$$

En arrondissant au dix-millième, on obtient bien :

$$\boxed{P(R) \approx 0{,}0283}$$

4. **Probabilité que le véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable :**

On cherche $P_R(N)$.

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)}$$

En utilisant les valeurs (de préférence non arrondies pour plus de précision, sinon les valeurs arrondies précédentes) :

$$P_R(N) \approx \frac{0{,}01847}{0{,}02827} \approx 0{,}65334$$

Au dix-millième :

$$\boxed{P_R(N) \approx 0{,}6533}$$

Remarque : Le résultat est cohérent avec l'hypothèse de la Partie B ($0{,}65$).

Partie B

1. **Loi de probabilité de X :**

On répète $n = 400$ fois de manière identique et indépendante (le tirage étant assimilé à un tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli n'ayant que deux issues :

- Succès : « le véhicule est neuf » avec une probabilité $p = 0{,}65$;
- Échec : « le véhicule n'est pas neuf » avec une probabilité $1 - p = 0{,}35$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Conclusion : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}65$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(400\,;\,0{,}65)}$$

2. (a) **Probabilité qu'exactement 275 véhicules soient neufs :**

$$P(X = 275) = \binom{400}{275} \times 0{,}65^{275} \times 0{,}35^{125}$$

À la calculatrice :

$$\boxed{P(X = 275) \approx 0{,}0118}$$

(b) **Probabilité que plus de 250 véhicules soient neufs :**

On cherche $P(X > 250) = P(X \geqslant 251)$. Selon la calculatrice, on utilise $1 - P(X \leqslant 250)$:

$$P(X > 250) = 1 - P(X \leqslant 250)$$

À la calculatrice (fonction BinomCDf) :

$$P(X \leqslant 250) \approx 0{,}1567$$

Donc :

$$P(X > 250) \approx 1 - 0{,}1567 \approx 0{,}8433$$

$$\boxed{P(X > 250) \approx 0{,}8433}$$

3. **Calcul et interprétation de $P(X \leqslant 275)$:**

   À la calculatrice :

$$\boxed{P(X \leqslant 275) \approx 0{,}9473}$$

   Interprétation : Il y a environ $94{,}73\,\%$ de chances que, parmi les 400 véhicules hybrides rechargeables sélectionnés, il y en ait au plus 275 qui soient neufs.

Partie C

1. **Expression de p_n :**

   L'évènement « tous les véhicules sont d'occasion » correspond à obtenir 0 succès (aucun véhicule neuf) sur n tirages.

$$p_n = P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}65^0 \times (1 - 0{,}65)^n = 1 \times 1 \times 0{,}35^n$$

$$\boxed{p_n = 0{,}35^n}$$

2. (a) **Expression de q_n :**

   L'évènement « au moins un véhicule est neuf » est l'évènement contraire de « tous les véhicules sont d'occasion ».

$$q_n = 1 - p_n$$

$$\boxed{q_n = 1 - 0{,}35^n}$$

   (b) **Recherche de n pour $q_n \geqslant 0{,}9999$:**

   On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}35^n &\geqslant 0{,}9999 \\ -0{,}35^n &\geqslant 0{,}9999 - 1 \\ -0{,}35^n &\geqslant -0{,}0001 \\ 0{,}35^n &\leqslant 0{,}0001 \quad \text{(en multipliant par } -1\text{, on change le sens)} \end{aligned}$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc :

$$\ln(0{,}35^n) \leqslant \ln(0{,}0001)$$

$$n \times \ln(0{,}35) \leqslant \ln(0{,}0001)$$

Comme $0 < 0{,}35 < 1$, on a $\ln(0{,}35) < 0$. En divisant par $\ln(0{,}35)$, on change le sens de l'inégalité :

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)}$$

Calcul numérique :

$$\frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)} \approx \frac{-9{,}210}{-1{,}049} \approx 8{,}77$$

n étant un entier, la plus petite valeur est 9.

Conclusion : Il faut choisir au minimum **9 véhicules**.

Note pour les élèves n'ayant pas encore vu le logarithme* ($\ln$) *:
On peut déterminer n à l'aide du **tableau de valeurs** de la calculatrice (balayage) :

- Dans le menu **Table** (ou Suites), saisir la fonction $Y_1 = 1 - 0{,}35^x$.
- Régler le pas de la table sur 1 (Start = 0, Step = 1).
- Chercher la première valeur de x pour laquelle $Y_1 \geqslant 0{,}9999$.
- On observe :
  - Pour $x = 8 : 1 - 0{,}35^8 \approx 0{,}999\,77$ (ce qui est $< 0{,}999\,9$).
  - Pour $x = 9 : 1 - 0{,}35^9 \approx 0{,}999\,92$ (ce qui est $\geqslant 0{,}999\,9$).
- On conclut que la plus petite valeur est $n = 9$.

Exercice 2

1. **Étude de la fonction h :**

   On a pour tout $x > 0 : x^2 - x \leqslant h(x) \leqslant x^2$.

   Affirmation n°1 : FAUSSE

   Cherchons la limite de la borne inférieure $x^2 - x$ en $+\infty$.

   - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$.
   - C'est une **Forme Indéterminée** du type « $\infty - \infty$ ».

   Levons l'indétermination en factorisant par le terme de plus haut degré (x^2) :

$$x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Or :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 \end{cases}$$

Par produit, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = +\infty$$

Conclusion : D'après le théorème de comparaison, comme $h(x) \geqslant x^2 - x$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x) = +\infty$, alors :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$$

La limite étant infinie, la courbe $\mathcal{C}_h$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Affirmation n°2 : VRAIE

Divisons l'inégalité de l'énoncé par x^2 (avec $x > 0$, donc $x^2 > 0$) :

$$\frac{x^2 - x}{x^2} \leqslant \frac{h(x)}{x^2} \leqslant \frac{x^2}{x^2}$$

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \frac{h(x)}{x^2} \leqslant 1$$

Calculons les limites des termes encadrants :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

D'après le **théorème des gendarmes** :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x^2} = 1}$$

2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty; -1[$ par $f(x) = e^{\frac{-5}{x+1}}$.

Affirmation n°3 : FAUSSE

On procède par composition des limites. Posons $X = \dfrac{-5}{x+1}$.

- Lorsque $x \to -\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$.
- Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5}{x+1} = 0$. Ainsi, $X \to 0$.

Or, $\lim\limits_{X \to 0} e^X = e^0 = 1$. Par composition :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1}$$

La limite est 1, et non $+\infty$.

<u>Affirmation n°4 : VRAIE</u>

Étudions la limite en -1. Comme f est définie sur $]-\infty; -1[$, on regarde la limite à gauche ($x < -1$).

- Lorsque $x \to -1$ avec $x < -1$, $x+1$ tend vers 0 en étant négatif (0^-).
- Par quotient (règle des signes : -5 négatif et 0^- négatif) :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{-5}{x+1} = +\infty$$

Posons $X = \dfrac{-5}{x+1}$. Quand $x \to -1^-$, alors $X \to +\infty$.

$$\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$$

Par composition :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty}$$

Puisque $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = -1$ **est bien une asymptote verticale** à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.