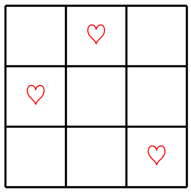
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (9 points)

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets cœurs ! ».
Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-contre.
Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.



1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €.
   Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $\{X = 5\}$.
   (c) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $\{X \geqslant 2\}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (d) Si le joueur génère 20 tickets 3 fois par jour pendant 90 jours, combien de tickets gagnants aura-t-il, en moyenne, parmi un groupe de 20 tickets ?

Exercice 2 : (11 points)

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020+n$.

1. (a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   (b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.

   Compléter le programme en Python ci-contre de sorte qu'il retourne la valeur demandée.

```
def prog() :
  u = 10 560
  n = 0
  while ............ :
    ................
    ................
  return ............
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq 12\,500$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.
5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.
6. Déterminer, par un calcul à l'aide du logarithme, au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = 12\,500 - 500^{-0,02x+1,4}$ où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

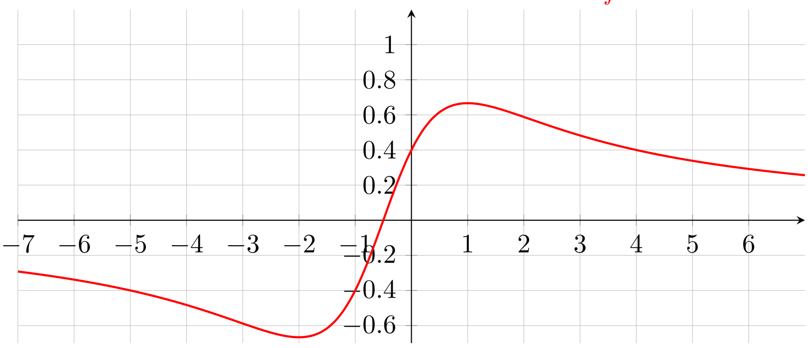
1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

Exercice 3 : (10 points)

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.

Courbe de la fonction dérivée f'



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

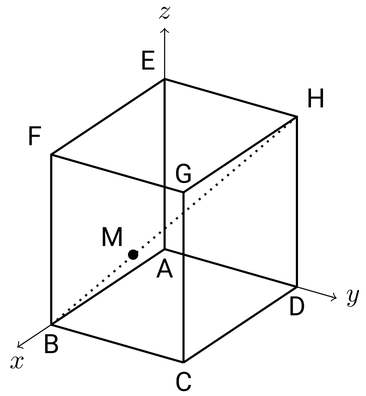
1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}; +\infty[$.
   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
5. On admet que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$$

6. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 4 : (10 points)

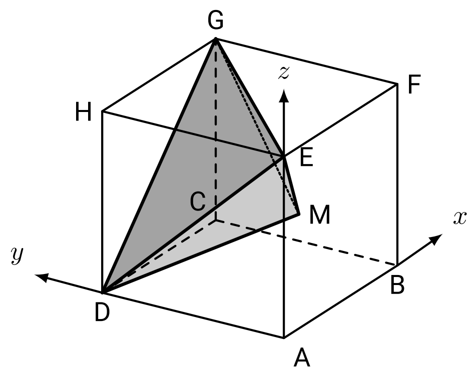
Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur égale à 1. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2. (a) Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.
   (b) On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
4. (a) Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.
   (c) Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M. Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

5. Le cube $ABCDEFGH$ est représenté ci-contre selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide $GEDM$, en gris sur la figure :
   Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide $GEDM$.



   (a) Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide $GEDM$ issue du point M. Déterminer les coordonnées du point K dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
   (b) En déduire le volume de la pyramide $GEDM$. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{B \times h}{3}$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.