PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES – QCM (6 points)

Question 1 : On réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{3}-\frac{2-x}{2}=\frac{2}{6}-\frac{3(2-x)}{6}=\frac{2-(6-3x)}{6}=\frac{2-6+3x}{6}=\frac{-4+3x}{6}$$

Réponse d. $\boxed{\frac{-4+3x}{6}}$

Question 2 : On remplace $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{2}$ et $c=\frac{1}{3}$:

$$B=\frac{1/6}{1/3}+\frac{1/2}{1/2}=\left(\frac{1}{6}\times\frac{3}{1}\right)+1=\frac{3}{6}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

Réponse b. $\boxed{\frac{3}{2}}$

Question 3 : On isole x :

$$C=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\iff C-\frac{3}{y}=\frac{2}{x}\iff\frac{Cy-3}{y}=\frac{2}{x}$$

En prenant l'inverse des deux membres (si $Cy-3\neq 0$) :

$$\frac{y}{Cy-3}=\frac{x}{2}\iff x=\frac{2y}{Cy-3}$$

Réponse b. $\boxed{x=\frac{2y}{Cy-3}}$

Question 4 : Notons M l'ensemble des adhérents.

- Mineurs : $\frac{3}{4}$ des adhérents.
- Majeurs : $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ des adhérents.

Parmi les majeurs, le tiers a plus de 25 ans. Donc les $\frac{2}{3}$ des majeurs ont entre 18 et 25 ans. La proportion cherchée est donc :

$$P=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Réponse a. $\boxed{\frac{1}{6}}$

Question 5 : Conversion d'unités :

$$36\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{h}^{-1}=\frac{36\,\mathrm{m}^3}{1\,\mathrm{h}}=\frac{36\times 1000\,\mathrm{L}}{3600\,\mathrm{s}}=\frac{36000}{3600}\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}=10\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Réponse b. $\boxed{10}$

Question 6 : On résout graphiquement ou algébriquement $-x^2 + 10 \leq 5$:

$$-x^2 \leq -5 \iff x^2 \geq 5 \iff \sqrt{x^2} \geq \sqrt{5} \iff |x| \geq \sqrt{5}$$

Cela correspond à l'union des intervalles $]-\infty\,;\,-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}\,;\,+\infty[$. Autrement dit : $x \leq -\sqrt{5}$ ou $x \geq \sqrt{5}$. **Réponse b.** $\boxed{x \leq -\sqrt{5} \text{ ou } x \geq \sqrt{5}}$

Question 7 : La moyenne pondérée est donnée par :

$$m = \frac{10 \times 1 + 7 \times 2 + x \times 2}{1 + 2 + 2} = \frac{10 + 14 + 2x}{5} = \frac{24 + 2x}{5}$$

On veut $m = 12$:

$$\frac{24 + 2x}{5} = 12 \iff 24 + 2x = 60 \iff 2x = 36 \iff x = 18$$

Réponse b. $\boxed{18}$

Question 8 : Soit P le prix initial. Le coefficient multiplicateur global est :

$$CM = (1 - 0,30) \times (1 - 0,20) = 0,70 \times 0,80 = 0,56$$

Le prix final est donc $56\,\%$ du prix initial. La baisse est de :

$$1 - 0,56 = 0,44 = 44\,\%$$

Réponse c. $\boxed{44\%}$

DEUXIÈME PARTIE (14 points)

Exercice 1 : Étude de fonctions et suites

Partie A : Modèle continu

1. On cherche les abscisses $x \in \mathbb{R}^*$ tels que $g(x) = f(x)$:

$$\frac{3+x}{2x} = x - 2 \iff \frac{3+x}{2x} - (x-2) = 0$$

Mise au même dénominateur :

$$\frac{3+x-2x(x-2)}{2x} = 0 \iff \frac{3+x-2x^2+4x}{2x} = 0 \iff \frac{-2x^2+5x+3}{2x} = 0$$

Cela revient bien à résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^*$.

2. Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul (et le dénominateur non nul). On résout $-2x^2+5x+3=0$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49 > 0$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{-12}{-4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2(-2)} = \frac{2}{-4} = -0,5$$

Ces deux valeurs sont non nulles, donc valides. On calcule les ordonnées avec $f(x) = x - 2$:

- Pour $x_1 = 3$, $y_1 = 3 - 2 = 1$. Point $I_1(3\,;\,1)$.
- Pour $x_2 = -0,5$, $y_2 = -0,5 - 2 = -2,5$. Point $I_2(-0,5\,;\,-2,5)$.

Conclusion : Les points d'intersection sont $\boxed{(3\,;\,1)}$ et $\boxed{(-0,5\,;\,-2,5)}$.

3. Étudions le signe de $E(x) = \dfrac{-2x^2+5x+3}{2x}$.
   - Le numérateur $-2x^2+5x+3$ est du signe de $a = -2$ (négatif) à l'extérieur des racines $-0,5$ et 3.
   - Le dénominateur $2x$ s'annule en 0 et est positif pour $x > 0$.

x	$-\infty$		-0.5		0		3		$+\infty$
$-2x^2+5x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Quotient		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

4. La position relative dépend du signe de $g(x) - f(x)$. D'après le tableau précédent :
   - Sur $]-\infty\,;\,-0,5[\cup]0\,;\,3[$, $g(x) - f(x) > 0$, donc $\mathcal{C}_g$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_f$.
   - Sur $]-0,5\,;\,0[\cup]3\,;\,+\infty[$, $g(x) - f(x) < 0$, donc $\mathcal{C}_g$ est **en dessous** de $\mathcal{C}_f$.
   - Les courbes se coupent aux points d'abscisses $-0,5$ et 3.

Partie B : Modèle discret

On a les suites définies par :

- $u_n = n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- $v_n = \dfrac{3+n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **Pour la suite (u_n) :**

   (a) **Calcul des termes :**
   - Le terme d'indice 2 est $u_2 = 2 - 2 = \boxed{0}$.
   - La suite étant définie sur $\mathbb{N}$ (commence à u_0), le 4$^{\text{ème}}$ terme correspond à l'indice $n = 3$.

   $$u_3 = 3 - 2 = \boxed{1}$$

   (b) **Expression de u_{n+1} :**

   $$u_{n+1} = (n+1) - 2 = n + 1 - 2 = \boxed{n-1}$$

   (c) **Sens de variation (Méthode de la différence) :** Calculons la différence entre deux termes consécutifs pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$u_{n+1} - u_n = (n-1) - (n-2) = n - 1 - n + 2 = 1$$

   On constate que $u_{n+1} - u_n = 1 > 0$. **Conclusion :** La suite (u_n) est **strictement croissante** sur $\mathbb{N}$.

   Pour la suite (v_n) :

   (a) **Calcul des termes :**
   - Le terme d'indice 2 est $v_2 = \dfrac{3+2}{2\times 2} = \dfrac{5}{4} = \boxed{1,25}$.
   - La suite étant définie sur $\mathbb{N}^*$ (commence à v_1), le 4$^{\text{ème}}$ terme correspond à l'indice $n = 4$.

   $$v_4 = \frac{3+4}{2\times 4} = \frac{7}{8} = \boxed{0,875}$$

   (b) **Expression de v_{n+1} :**

   $$v_{n+1} = \frac{3+(n+1)}{2(n+1)} = \boxed{\frac{n+4}{2n+2}}$$

(c) **Sens de variation (Méthode de la différence) :** Calculons la différence $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+4}{2(n+1)} - \frac{n+3}{2n}$$

Mise au même dénominateur qui est $2n(n+1)$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+4) - (n+1)(n+3)}{2n(n+1)}$$

Développons le numérateur :

$$n(n+4) = n^2 + 4n$$

$$(n+1)(n+3) = n^2 + 3n + n + 3 = n^2 + 4n + 3$$

D'où :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^2 + 4n) - (n^2 + 4n + 3)}{2n(n+1)} = \frac{-3}{2n(n+1)}$$

Étude du signe :

- Le numérateur est -3 (négatif).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 1$, donc $2n(n+1)$ est strictement positif.

Par quotient, $v_{n+1} - v_n < 0$. **Conclusion :** La suite (v_n) est **strictement décroissante** sur $\mathbb{N}^*$.

2. **Étude de la suite** (w_n) **:** On définit $w_n = v_n - u_n$ sur $\mathbb{N}^*$.

Utilisons la méthode de la différence pour étudier les variations :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$$

On regroupe les termes des suites v et u :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

D'après les questions précédentes, nous connaissons déjà les valeurs de ces différences :

- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-3}{2n(n+1)}$ (strictement négatif).
- $u_{n+1} - u_n = 1$.

Ainsi :

$$w_{n+1} - w_n = \underbrace{\frac{-3}{2n(n+1)}}_{<0} - 1$$

Puisque l'on soustrait 1 à un nombre déjà strictement négatif, le résultat est nécessairement strictement négatif.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_{n+1} - w_n < 0$$

Conclusion : La suite (w_n) est **strictement décroissante** sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Mouvement du piston

Données : $h(t) = 0,05\cos(13t)$ et $v(t) = -0,65\sin(13t)$ sur $I = \left[0\,;\,\frac{2\pi}{13}\right]$.

1. **Vitesses extrêmes :** On sait que pour tout réel X, $-1 \leq \sin(X) \leq 1$. Donc $-0,65 \leq -0,65\sin(13t) \leq 0,65$.
   - **Vitesse maximale :** $v_{max} = 0,65$ m/s. Elle est atteinte quand $\sin(13t) = -1$. Or $13t \in [0; 2\pi]$. $\sin(X) = -1 \iff X = \frac{3\pi}{2}$.
   $$13t = \frac{3\pi}{2} \iff \boxed{t = \frac{3\pi}{26}\text{ s}}$$
   - **Vitesse minimale :** $v_{min} = -0,65$ m/s. Atteinte quand $\sin(13t) = 1$.
   $$13t = \frac{\pi}{2} \iff \boxed{t = \frac{\pi}{26}\text{ s}}$$
2. **Vitesse nulle :** $v(t) = 0 \iff -0,65\sin(13t) = 0 \iff \sin(13t) = 0$. Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ pour $13t$, les solutions sont 0, π et 2π.
   - $13t = 0 \iff t = 0$. Position : $h(0) = 0,05\cos(0) = \boxed{0,05\text{ m}}$ (Haut).
   - $13t = \pi \iff t = \frac{\pi}{13}$. Position : $h\left(\frac{\pi}{13}\right) = 0,05\cos(\pi) = \boxed{-0,05\text{ m}}$ (Bas).
   - $13t = 2\pi \iff t = \frac{2\pi}{13}$. Position : $h\left(\frac{2\pi}{13}\right) = 0,05\cos(2\pi) = \boxed{0,05\text{ m}}$ (Haut).

Exercice 3 : Géométrie et produit scalaire

Partie A : Géométrie vectorielle

On a $EFGH$ rectangle, $EH = 2$, $EF = 3$. On peut placer un repère orthonormé $(E\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$. Les coordonnées sont : $E(0;0)$, $F(3;0)$, $G(3;2)$, $H(0;2)$. M milieu de $[FG]$ donc $M(3\,;\,1)$. $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HG} \implies \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$. Comme $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, on a $\overrightarrow{EK}(1\,;\,2)$ donc $K(1\,;\,2)$.

1. Calculons $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EM}$ avec les coordonnées :
$$\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EM} = 1\times 3 + 2\times 1 = 3 + 2 = 5$$

   Méthode sans coordonnées (Chasles) :
$$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{EM} = (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK})\cdot(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM})$$

   Comme $EFGH$ est un rectangle :

- $\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{EF} \implies$ produit scalaire nul.
- $\overrightarrow{HK}$ colinéaire à $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FM}$ colinéaire à $\overrightarrow{EH}$.

On développe :

$$\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = \underbrace{\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EF}}_{0} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{EF} + \underbrace{\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{FM}}_{0}$$

Or $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

$$= \overrightarrow{EH} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}\right) \cdot \overrightarrow{EF}$$

$$= \frac{1}{2}EH^2 + \frac{1}{3}EF^2 = \frac{1}{2}(2^2) + \frac{1}{3}(3^2) = \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{3}(9) = 2 + 3 = 5$$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = 5}$

2. (a) L est le projeté orthogonal de K sur (EM), donc $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = \overline{EL} \times EM$. Comme l'angle est aigu (produit scalaire positif), $EL \times EM = 5$. Calculons la longueur EM :

$$EM = \sqrt{(x_M - x_E)^2 + (y_M - y_E)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$EL \times \sqrt{10} = 5 \implies EL = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

(b) On utilise l'autre expression du produit scalaire :

$$\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EM} = EK \times EM \times \cos(\widehat{KEM})$$

Calculons la longueur EK :

$$EK = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

D'où :

$$5 = \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \cos(\widehat{KEM})$$

$$5 = \sqrt{50}\cos(\widehat{KEM}) = 5\sqrt{2}\cos(\widehat{KEM})$$

$$\cos(\widehat{KEM}) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle dont le cosinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\boxed{\frac{\pi}{4} \text{ rad (ou } 45^\circ)}$.

Partie B : Optimisation

$A(x\,;\,-2)$ et $B(x+4\,;\,x+3)$. $O(0;0)$.

1. Vecteurs : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x+4 \\ x+3 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x(x+4)+(-2)(x+3) = x^2+4x-2x-6 = \boxed{x^2+2x-6}$$

2. Le triangle OAB est rectangle en O si et seulement si $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$.

$$x^2+2x-6=0$$

$\Delta = 2^2-4(1)(-6) = 4+24 = 28 = (2\sqrt{7})^2$.

$$x = \frac{-2\pm 2\sqrt{7}}{2} = -1\pm\sqrt{7}$$

Les valeurs sont $\boxed{-1-\sqrt{7} \text{ et } -1+\sqrt{7}}$.

3. Soit $f(x) = x^2+2x-6$.

   (a) C'est un polynôme du second degré avec $a = 1 > 0$. La parabole est tournée vers le haut. L'abscisse du sommet est $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2} = -1$. f est **décroissante sur** $]-\infty\,;\,-1]$ **et croissante sur** $[-1\,;\,+\infty[$.

   (b) Le produit scalaire est minimal au sommet de la parabole, donc pour $\boxed{x=-1}$. Ce minimum vaut $f(-1) = (-1)^2+2(-1)-6 = 1-2-6 = -7$.

   (c) Pour $x=-1$, calculons l'angle $\widehat{BOA}$. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -7$. Coordonnées des points pour $x=-1$: $A(-1\,;\,-2)$ et $B(3\,;\,2)$. Longueurs :

$$OA = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$OB = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

   Formule du produit scalaire : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\times OB\times\cos(\widehat{BOA})$.

$$-7 = \sqrt{5}\times\sqrt{13}\times\cos(\widehat{BOA}) = \sqrt{65}\cos(\widehat{BOA})$$

$$\cos(\widehat{BOA}) = \frac{-7}{\sqrt{65}}$$

   D'après l'aide au calcul : $\cos^{-1}\left(\dfrac{-7}{\sqrt{65}}\right) \approx 150°$. L'angle mesure environ $\boxed{150°}$.