PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES – QCM (6 points)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

Question 1

Mettre l'expression $\frac{1}{3} - \frac{2-x}{2}$ sous la forme $\frac{a+bx}{c}$, avec a, b et c entiers relatifs.

a) $\frac{-1+x}{1}$ b) $\frac{2-3x}{6}$ c) $\frac{3-x}{5}$ d) $\frac{-4+3x}{6}$

Question 2

Calculer l'expression $B = \frac{a}{c} + \frac{\frac{1}{2}}{b}$ pour $a = \frac{1}{6}$; $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}$.

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

Question 3

Soit la relation suivante : $C = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$. On peut alors affirmer que :

a) $x = 2\left(\frac{1}{C} - \frac{y}{3}\right)$ b) $x = \frac{2y}{Cy-3}$ c) $x = \frac{5-Cy}{C}$ d) $x = \frac{5}{2C}$

Question 4

Dans un club sportif les trois quarts des adhérents sont mineurs et le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans. La proportion des 18-25 ans est :

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{3}$

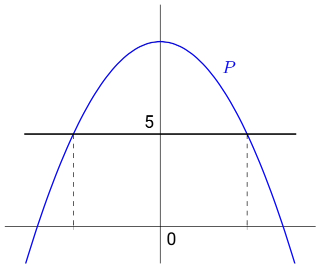
Question 5

Le débit d'une rivière est de 36 m$^3 \cdot$ h^{-1} son débit en $L \cdot$ s^{-1} est :

a) 3600 b) 10 c) 100 d) 1000

Question 6

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \to -x^2 + 10$.



On note (Γ) l'inéquation, sur $\mathbb{R}$, $f(x) \leq 5$. L'inéquation (Γ) est équivalente à :

a) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

b) $x \leq -\sqrt{5}$ ou $x \geq \sqrt{5}$

c) $x \geq \sqrt{5}$

d) $x = -\sqrt{5}$ et $x = \sqrt{5}$

Question 7

Voici une série de notes avec les coefficients associés :

Note	10	7	x
Coefficient	1	2	2

On note m la moyenne de cette série. Que doit valoir x pour que $m = 12$?

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20

Question 8

Durant les soldes, le prix d'un article baisse de 30 % puis de 20 %, le prix de l'article a subi une baisse de :

a) 10% b) 56% c) 44% d) 60%

DEUXIÈME PARTIE (14 points)

Exercice 1 ($\sim$6 points)

Partie A : Modèle continu

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{3+x}{2x}$ et la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2$.

1. Montrer que trouver les abscisses des points d'intersection entre g et f revient à résoudre sur $\mathbb{R}^*$
$$\frac{-2x^2+5x+3}{2x} = 0$$
2. Donner les coordonnées de ces points d'intersection.
3. Dresser le tableau de signes de l'expression $\dfrac{-2x^2+5x+3}{2x}$.
4. En déduire les positions relatives de C_f et C_g, respectivement courbes représentatives de f et g.

Partie B : Modèle discret

On pose (u_n) suite définie sur $\mathbb{N}$ et (v_n) suite définie sur $\mathbb{N}^*$ respectivement par :

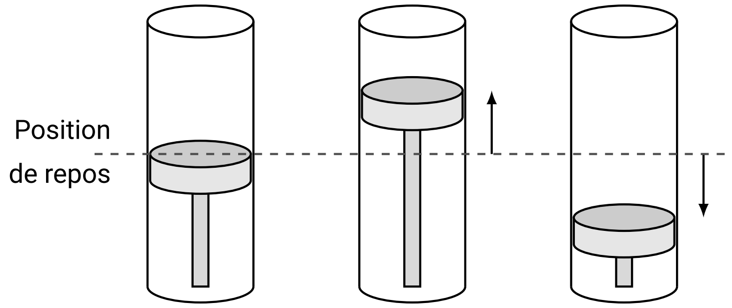
$$u_n = f(n) = n - 2 \qquad \text{et} \qquad v_n = g(n) = \frac{3+n}{2n}$$

1. Pour chacune de ces deux suites, réponde aux questions suivantes :
   (a) Calculer le terme d'indice 2 et le 4$^{\text{ème}}$ terme.
   (b) Donner l'expression réduite du terme d'indice $n+1$.
   (c) Etudier le sens de variation avec la méthode de votre choix.
2. On définit la suite (w_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = v_n - u_n$.

   Etudier le sens de variation de (w_n) à l'aide de la méthode de votre choix.

Exercice 2 ($\sim$2 points)

Un piston dans un moteur oscille de haut en bas à partir d'une position de repos comme indiqué.



Le mouvement de ce piston peut être modélisé par la fonction h définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{13}\right]$ par :

$h(t) = 0,05\cos(13t)$ où t est le temps en $s,$ et $h(t)$ le déplacement, en $m,$ de la tête de piston par rapport à la position de repos.

La vitesse de la tête du piston en fonction du temps est $v(t) = -0,65\sin(13t)$.

1. Déterminer les vitesses maximum et minimum du piston. Indiquer les instants où elles sont atteintes.
2. À quels instants la vitesse est-elle nulle ? Donner les positions du piston correspondantes.

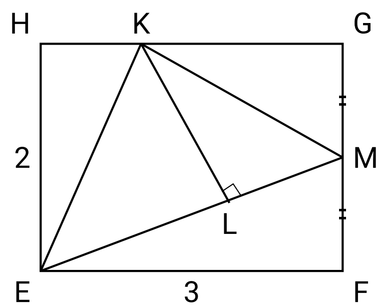
Exercice 3 ($\sim$6 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

$EFGH$ est un rectangle avec $EH = 2$ et $EF = 3$. M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\vec{HK} = \dfrac{1}{3}\vec{HG}$.

L est le projeté orthogonal de K sur la droite (EM).



1. Montrer que $\vec{EK} \cdot \vec{EM} = 5$. On pourra s'aider de la relation de Chasles.
2. En écrivant le produit scalaire de $\vec{EK} \cdot \vec{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
   (a) La longueur EL.
   (b) Une mesure de l'angle $\widehat{KEM}$.

Partie B :

Soit x réel et $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ un repère orthonormé avec $A(x\,;\,-2)$, $B(x+4\,;\,x+3)$ deux points du plan.

1. Exprimer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ en fonction de x.
2. Déterminer pour quelles valeurs de x le triangle OAB est rectangle en O.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 6$.
   (a) Etudier ses variations sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire pour quelle valeur de x le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ est minimal.
   (c) Déterminer alors une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BOA}$.

Aide au calcul :

$$\cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{205}}\right) \approx 119°$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right) \approx 30°$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{65}}\right) \approx 150°$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{205}}\right) \approx 61°$$