L'utilisation d'une calculatrice est autorisée en mode examen.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

EXERCICE 1 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,85u_n + 150.$$

1. Calculer u_1.
2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

   $$u_n > 1\,000.$$

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1\,000$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,85$.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

   $$u_n = 1\,000 + 9\,000 \times 0,85^n.$$

   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. En 2021, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte $10\,000$ abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 15 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 150 nouveaux abonnés. L'influenceuse affirme que : « Mon nombre d'abonnés ne sera jamais inférieur à $1\,500$ à long terme ».

   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 — 5 points

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux mails. Parmi ces mails, 7 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir. On choisit au hasard un mail reçu par l'entreprise. Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le mail choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à $0,85$.
- La probabilité que le mail choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à $0,01$.

On note :

- S l'évènement « le mail choisi est un spam » ;
- I l'évènement « le mail choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\overline{S}$ et $\overline{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.
2. (a) Calculer la probabilité que le mail choisi soit un spam et qu'il soit classé indésirable.
   (b) Calculer la probabilité que le mail choisi soit classé indésirable.
   (c) Le mail choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un spam ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-4} près.
3. On choisit au hasard 100 mails parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 100 mails parmi l'ensemble des mails reçus par l'entreprise. On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les spams parmi les 100 mails choisis.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z, et quels sont ses paramètres ?
   (b) Quelle est la probabilité que, parmi les 100 mails choisis, 4 au moins soient du spam ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-4} près.
4. Dans cette question, on choisit un échantillon de n mails, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un spam dans cet échantillon.
   (a) Écrire p_n en fonction de n.
   (b) Compléter le programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel qui renvoie la plus petite valeur entière de n telle que la probabilité qu'il y ait au moins un spam dans cet échantillon soit supérieure à $0,99$.

```
def seuil() :
    n = 0
    P = 0
    while P .................... :
      n = n + 1
      P = ...........
    return n
```

(c) Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

EXERCICE 3 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère :

- La droite d passant par les points $A(1\,;\,1\,;\,-2)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,2)$.
- La droite d' de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Le plan P d'équation cartésienne $x + my - 2z + 8 = 0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite d' ?

a) $M_1(-1\,;\,3\,;\,-2)$

b) $M_2(11\,;\,-9\,;\,-22)$

c) $M_3(-7\,;\,9\,;\,2)$

d) $M_4(-2\,;\,3\,;\,4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite d' est :

a) $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites d et d' sont :

a) sécantes

b) strictement parallèles

c) non coplanaires

d) confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite d est parallèle au plan P est :

a) $m = -1$

b) $m = 1$

c) $m = 5$

d) $m = -2$

Question 5 : Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque les coordonnées de $\vec{w}$ sont :

a) $\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$

Question 6 : Les points $C(2\,;\,-5\,;\,1)$, $D(1\,;\,1\,;\,2)$ et E sont alignés lorsque les coordonnées de E sont :

a) $(0\,;\,7\,;\,3)$

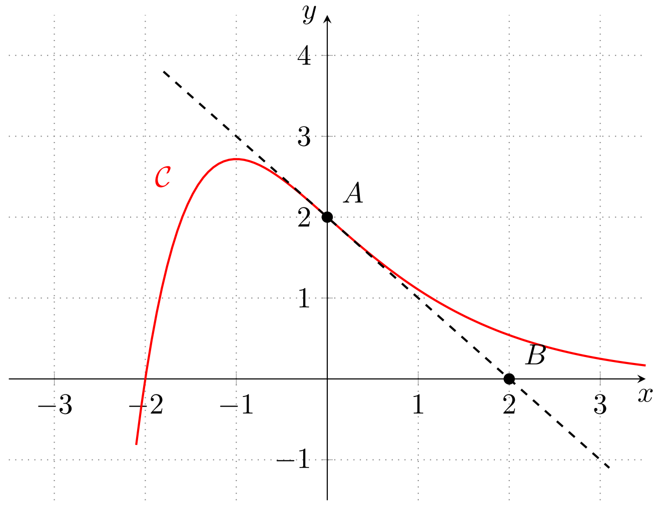
b) $(3\,;\,1\,;\,2)$

c) $(1\,;\,2\,;\,-1)$

d) $(2\,;\,1\,;\,1)$

EXERCICE 4 — 5 points

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes. On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points $A(0\,;\,2)$ et $B(2\,;\,0)$.

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble concave.

Partie 2

Pour tout nombre réel x, on définit la fonction g par $g(x) = (x+2)e^{-x}$ et on nomme $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. On rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (-x-1)e^{-x}$.
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$. On calculera la valeur exacte de l'extremum de g sur $\mathbb{R}$.
3. On rappelle que g'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction g.
   (a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x)$.
   (b) Peut-on affirmer que g est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$?
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1. Que peut-on dire de la position relative de T et de $\mathcal{C}_g$?