EXERCICE 1 — 6 points

1) On calcule le premier terme de la suite :

$$u_1 = 1500 \times 0,95 + 250 = \boxed{1\,675}$$

2) Une baisse de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{5}{100} = 0,95$. Ainsi, le nombre d'individus de l'année précédente est multiplié par $0,95$. Ensuite, on réintroduit 250 individus, ce qui correspond à une addition de 250. On obtient donc la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_{n+1} = 0,95u_n + 250}$$

3) L'appel `suite(10)` permet de calculer le nombre d'individus au bout de 10 ans, c'est-à-dire en l'année $2021 + 10 = 2031$. À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$u_{10} \approx 2\,904$$

Interprétation : En 2031, la population de cette espèce sera d'environ **2 904 individus**.

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 5000$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = 1500$. Or $1500 \leq 5000$, donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** Supposons que pour un entier n fixé, $u_n \leq 5000$. Montrons que $u_{n+1} \leq 5000$.

$$\begin{aligned} u_n &\leq 5000 \\ 0,95u_n &\leq 0,95 \times 5000 \quad \text{(car } 0,95 > 0\text{)} \\ 0,95u_n &\leq 4750 \\ 0,95u_n + 250 &\leq 4750 + 250 \\ u_{n+1} &\leq 5000 \end{aligned}$$

  La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Donc, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n \leq 5000}$.

4) b) Étudions le sens de variation de la suite (u_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (0,95u_n + 250) - u_n = -0,05u_n + 250$$

Or, nous savons d'après la question précédente que $u_n \leq 5000$.

$$u_n \leq 5000 \iff -0,05u_n \geq -0,05 \times 5000 \iff -0,05u_n \geq -250 \iff -0,05u_n + 250 \geq 0$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc **croissante**.

4) c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 5000. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est **convergente**.

5) a) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5000 \\ &= 0,95u_n + 250 - 5000 \\ &= 0,95u_n - 4750 \\ &= 0,95(u_n - \frac{4750}{0,95}) \\ &= 0,95(u_n - 5000) \\ &= 0,95v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une **suite géométrique** de raison $q = 0,95$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 5000 = 1500 - 5000 = \boxed{-3500}$.

5) b) On exprime v_n en fonction de n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -3500 \times 0,95^n$$

Comme $u_n = v_n + 5000$, on en déduit :

$$\boxed{u_n = 5000 - 3500 \times 0,95^n}$$

5) c) Comme $-1 < 0,95 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$. Par produit et somme :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 5000 - 3500 \times 0 = \boxed{5000}$$

Interprétation : À long terme, le nombre d'individus de l'espèce tendra à se stabiliser autour de **5 000 individus**.

6) On cherche la plus petite valeur de n telle que $u_n > 3500$. On peut utiliser le programme ou résoudre l'inéquation :

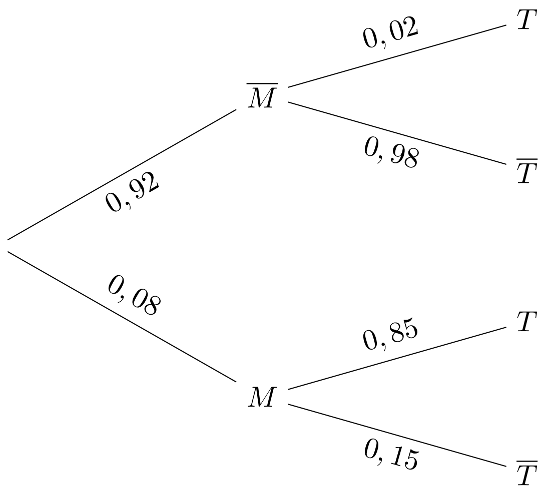
$$5000 - 3500 \times 0,95^n > 3500 \iff -3500 \times 0,95^n > -1500 \iff 0,95^n < \frac{1500}{3500} \approx 0,428$$

À la calculatrice (table de valeurs ou logarithme), on trouve $n = 17$ ($u_{16} \approx 3460$ et $u_{17} \approx 3527$). L'année correspondante est $2021 + 17 = \boxed{2038}$.

EXERCICE 2 — 4 points

On note M l'évènement « la personne est malade » et T l'évènement « le test est positif ». D'après l'énoncé : $P(M) = 0,08$, $P_M(\overline{T}) = 0,15$ (donc $P_M(T) = 0,85$), et $P_{\overline{M}}(T) = 0,02$.

1) Arbre pondéré modélisant la situation :



2) a) On calcule la probabilité que la personne soit infectée ET que le test soit positif :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,08 \times 0,85 = \boxed{0,068}$$

2) b) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$$

Or $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,92 \times 0,02 = 0,0184$. Donc :

$$P(T) = 0,068 + 0,0184 = \boxed{0,0864}$$

3) On cherche la probabilité qu'une personne soit infectée sachant que son test est positif :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,068}{0,0864} \approx 0,78703...$$

Arrondi à 10^{-4} près :

$$\boxed{P_T(M) \approx 0,7870}$$

4) a) On répète 10 fois une épreuve de Bernoulli (choisir une personne et tester si le résultat est positif) de manière identique et indépendante (tirage assimilé avec remise). Le succès est « le test est positif » avec une probabilité $p = 0,0864$. La variable aléatoire X suit donc une **loi binomiale** de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0864$.

$$X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0,0864)$$

4) b) On cherche la probabilité qu'exactement deux personnes aient un test positif :

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0864^2 \times (1 - 0,0864)^{10-2} \approx 45 \times 0,0864^2 \times 0,9136^8$$

À la calculatrice :

$$\boxed{P(X=2) \approx 0,1630}$$

4) c) On cherche la probabilité qu'au moins trois personnes aient un test positif :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$

À la calculatrice (fonction de répartition cumulée), on trouve $P(X \leq 2) \approx 0,9512$.

$$P(X \geq 3) \approx 1 - 0,9512 = \boxed{0,0488}$$

EXERCICE 3 — 5 points

Question 1 : Réponse b

On injecte les coordonnées des points dans la représentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ Pour le point $N(-3\,;\,-4\,;\,6)$: $1 + 2t = -3 \iff 2t = -4 \iff t = -2$. On vérifie : $y = -2 + (-2) = -4$ (OK) et $z = 4 - (-2) = 6$ (OK). Le point N appartient à Δ.

Question 2 : Réponse c
Un vecteur directeur de (BC) est $\vec{BC}(0-2\,;\,1-1\,;\,2-0) = (-2\,;\,0\,;\,2)$. Le vecteur directeur associé à la proposition c) est $\vec{u}(-1\,;\,0\,;\,1)$. On remarque que $\vec{BC} = 2\vec{u}$, donc les vecteurs sont colinéaires. De plus, pour $t = 0$ dans la paramétrique c), on retrouve le point $B(2;1;0)$. C'est donc une représentation de (BC).

Question 3 : Réponse c
Vecteur directeur de Δ : $\vec{u}(2\,;\,1\,;\,-1)$. Vecteur $\vec{AD}(-3-1\,;\,-2-0\,;\,4-2) = (-4\,;\,-2\,;\,2)$. On remarque que $\vec{AD} = -2\vec{u}$. Les droites sont donc parallèles. Comme $A(1;0;2)$ n'appartient pas à Δ (car $y_A = 0$ impliquerait $t = 2$, or $x_A = 1 \neq 1 + 2(2) = 5$), elles sont **strictement parallèles**.

Question 4 : Réponse b
Le plan est orthogonal à Δ si et seulement si un vecteur normal du plan est colinéaire à un vecteur directeur de Δ. Le vecteur normal du plan est $\vec{n}(2\,;\,1\,;\,-1)$ (d'après les coeff de la réponse b). C'est exactement le vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ. De plus, le plan doit passer par $C(0;1;2)$. Vérifions l'équation b) : $2(0) + 1 - 2 + 1 = 0$. C'est vérifié. L'équation est $2x + y - z + 1 = 0$.

Question 5 : Réponse d
On cherche $M(x;y;z)$ tel que $\vec{EM} = 2\vec{EF} + \vec{EG}$. $\vec{EF}(0-1\,;\,-1-2\,;\,3-1) = (-1\,;\,-3\,;\,2)$. $\vec{EG}(-4-1\,;\,2-2\,;\,1-1) = (-5\,;\,0\,;\,0)$. $2\vec{EF} + \vec{EG} = 2(-1\,;\,-3\,;\,2) + (-5\,;\,0\,;\,0) = (-2-5\,;\,-6+0\,;\,4+0) = (-7\,;\,-6\,;\,4)$. On a donc : $\begin{cases} x - 1 = -7 \\ y - 2 = -6 \\ z - 1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \\ z = 5 \end{cases}$ Soit $M(-6\,;\,-4\,;\,5)$.

EXERCICE 4 — 5 points

f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (2-x)e^{2x-1}$.

1) Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x-1} = +\infty$.

Par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2) a) f est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Posons $u(x) = 2-x \Rightarrow u'(x) = -1$ et $v(x) = e^{2x-1} \Rightarrow v'(x) = 2e^{2x-1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -1 \times e^{2x-1} + (2-x) \times 2e^{2x-1} \\ &= e^{2x-1}\left(-1 + 2(2-x)\right) \\ &= e^{2x-1}(-1+4-2x) \\ &= \boxed{(-2x+3)e^{2x-1}} \end{aligned}$$

2) b) Pour tout x, $e^{2x-1} > 0$. Le signe de $f'(x)$ dépend donc uniquement de $-2x+3$. $-2x+3 \geq 0 \iff -2x \geq -3 \iff x \leq \dfrac{3}{2} = 1,5$.

x	0		$1{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$2e^{-1}$	$\nearrow$	$0{,}5e^2$	$\searrow$	$-\infty$

Note : $f(0) = (2-0)e^{-1} = 2e^{-1}$.

Maximum : $f(1,5) = (2-1,5)e^{2(1,5)-1} = 0,5e^2$.

3) Résolution de $f(x) = 0$: $(2-x)e^{2x-1} = 0$. Comme l'exponentielle est strictement positive, cela équivaut à $2-x=0$, soit $x=2$. L'équation admet une **unique solution** exacte $\boxed{\alpha = 2}$. (L'énoncé demandait une valeur approchée, mais ici la valeur est entière).

4) Signe de $f(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$: D'après le tableau de variations et la solution de $f(x) = 0$:

- Sur $[0\,;\,2[$, $f(x) > 0$.
- Pour $x = 2$, $f(x) = 0$.
- Sur $]2\,;\,+\infty[$, $f(x) < 0$.

5) Convexité de f : Calculons $f''(x)$. $f'(x) = (-2x+3)e^{2x-1}$. Dérivons à nouveau (produit) :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^{2x-1} + (-2x+3) \times 2e^{2x-1} \\ &= e^{2x-1}(-2-4x+6) \\ &= e^{2x-1}(-4x+4) \end{aligned}$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $-4x+4$ (car $e^{\cdots} > 0$). $-4x+4 \geq 0 \iff 4 \geq 4x \iff 1 \geq x$.

- f est **convexe** sur $[0\,;\,1]$ (car $f'' \geq 0$).
- f est **concave** sur $[1\,;\,+\infty[$ (car $f'' \leq 0$).

La courbe admet un **point d'inflexion** au point d'abscisse $x = 1$. Ses coordonnées sont $(1\,;\,f(1))$ soit $(1\,;\,(2-1)e^{2-1}) = \boxed{(1\,;\,e)}$.

6) Équation de la tangente T en $a = 0,5$: $y = f'(0,5)(x-0,5) + f(0,5)$. $f'(0,5) = (-2(0,5)+3)e^{2(0,5)-1} = (-1+3)e^0 = 2 \times 1 = 2$. $f(0,5) = (2-0,5)e^0 = 1,5$. $y = 2(x-0,5)+1,5 \implies y = 2x-1+1,5$.

$$T : \boxed{y = 2x + 0,5}$$

7) On étudie le signe de $g(x) = f(x) - (2x+0,5)$.

Cela correspond à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T au point d'abscisse $0,5$.

Or, $0,5 \in [0\,;\,1]$. Sur cet intervalle, la fonction f est **convexe**.

Une fonction convexe a sa courbe représentative située **au-dessus** de toutes ses tangentes.

Par conséquent, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) \geq 2x + 0,5$.

En particulier, sur $[0\,;\,+\infty[$, l'expression n'est pas toujours positive (la fonction devient concave après 1), mais localement autour de 0,5 (et sur $[0;1]$), la différence est positive.