L'utilisation d'une calculatrice est autorisée en mode examen.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

EXERCICE 1 — 6 points

En 2021, une espèce animale comptait 1500 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2022, cette population baissera de 5 % chaque début d'année. Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 250 individus à la fin de chaque année, à partir de 2022.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'individus de cette espèce animale en l'année $(2021+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1500$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-contre.

   Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n) :
    u = 1500
    for i in range(n) :
        u = 0.95*u + 250
    return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 5000$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 5000$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$ et calculer v_0.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

   $$u_n = 5000 - 3500 \times 0,95^n$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer à partir de quelle année le nombre d'individus dépassera strictement 3500. Déterminer cette année.

EXERCICE 2 — 4 points

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays. Selon les autorités sanitaires de ce pays, 8 % des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 15 % sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 2 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population. On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. (a) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité que son test soit positif est de $0,0864$.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-4} près.
4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-4} près.
   (c) Déterminer la probabilité pour qu'au moins trois personnes aient un test positif. On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-4} près.

EXERCICE 3 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1\,;\,0\,;\,2)$, $B(2\,;\,1\,;\,0)$,

$C(0\,;\,1\,;\,2)$, $D(-3\,;\,-2\,;\,4)$ et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \,, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

a) $M(2\,;\,1\,;\,-1)$

b) $N(-3\,;\,-4\,;\,6)$

c) $P(-3\,;\,-4\,;\,2)$

d) $Q(-5\,;\,-5\,;\,1)$

Question 2 : Une représentation paramétrique de la droite (BC) est :

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \,, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -2t + 5 \\ y = 4 \\ z = 2t + 2 \end{cases} ,t \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}.$

d) $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 0 \\ z = 2t + 2 \end{cases} ,t \in \mathbb{R}.$

Question 3 : La droite Δ et la droite (AD) sont :

a) sécantes

b) non coplanaires

c) strictement parallèles

d) confondues

Question 4 : Une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite Δ est :

a) $2x + y - z - 1 = 0$

b) $2x + y - z + 1 = 0$

c) $x - 2y + 4z - 6 = 0$

d) $y + 2z - 5 = 0$

Question 5 : On donne les points $E(1\,;\,2\,;\,1)$, $F(0\,;\,-1\,;\,3)$ et $G(-4\,;\,2\,;\,1)$. Soit M le point tel que $\vec{EM} = 2\vec{EF} + \vec{EG}$. Les coordonnées de M sont :

a) $(-7\,;\,-6\,;\,4)$

b) $(8\,;\,8\,;\,-1)$

c) $(-8\,;\,-8\,;\,1)$

d) $(-6\,;\,-4\,;\,5)$

EXERCICE 4 — 5 points

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (2-x)e^{2x-1}$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = (-2x+3)e^{2x-1}$.

   (b) Déterminer les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
5. Étudier la convexité de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe de f.
6. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $0,5$.
7. Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, que peut-on dire du signe de $(2-x)e^{2x-1} - 2x - 0,5$?