Exercice

20 points

Partie A

10 points

D'après l'énoncé : $p(V) = 0{,}3$ et $p_V(C) = 0{,}8$ ($80\,\%$ des familles qui réservent un emplacement réservent aussi une cabine).

1) **a.** $75\,\%$ des familles réservent une cabine, donc $\boxed{p(C) = 0{,}75}$.

b. On cherche $p(V \cap C)$:

$$p(V \cap C) = p(V) \times p_V(C) = 0{,}3 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}24}.$$

La probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine est $0{,}24$.

2) On cherche $p_C(V)$:

$$p_C(V) = \frac{p(V \cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}24}{0{,}75} = \boxed{0{,}32}.$$

Sachant qu'elle a réservé une cabine, la probabilité que la famille réserve un emplacement pour un véhicule est $0{,}32$.

3) V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$p(C) = p(V \cap C) + p(\overline{V} \cap C), \quad \text{donc} \quad p(\overline{V} \cap C) = 0{,}75 - 0{,}24 = 0{,}51.$$

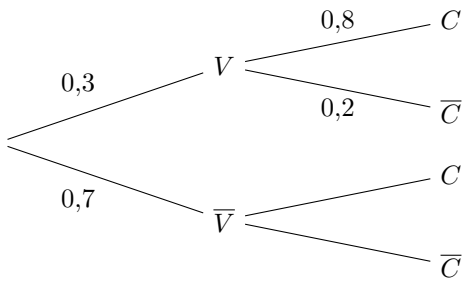
De plus $p(\overline{V}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. D'où

$$p_{\overline{V}}(C) = \frac{p(\overline{V} \cap C)}{p(\overline{V})} = \frac{0{,}51}{0{,}7} = \boxed{\frac{51}{70}} \approx \boxed{0{,}73}.$$

($51 = 3 \times 17$ et $70 = 2 \times 5 \times 7$ n'ont aucun diviseur commun autre que 1 : la fraction est irréductible.)

Interprétation : parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ $73\,\%$ réservent une cabine.

4) $p(\overline{V}) = 0{,}7$ et $p_V(\overline{C}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. L'arbre complété :



Remarque : les branches issues de $\overline{V}$ portent $p_{\overline{V}}(C) = \frac{51}{70}$ et $p_{\overline{V}}(\overline{C}) = \frac{19}{70}$ (Partie A, question 3), mais l'énoncé ne demandait que les quatre pointillés.

Partie B

10 points

1) **a.** Le montant des suppléments dépend de ce que la famille réserve. Quatre cas sont possibles :

- ni emplacement, ni cabine : $X = 0$, avec $p(\overline{V} \cap \overline{C}) = p(\overline{V}) - p(\overline{V} \cap C) = 0{,}7 - 0{,}51 = 0{,}19$;
- un emplacement seul : $X = 70$, avec $p(V \cap \overline{C}) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$;
- une cabine seule : $X = 100$, avec $p(\overline{V} \cap C) = 0{,}51$ (Partie A, question 3) ;
- un emplacement et une cabine : $X = 100 + 70 = 170$, avec $p(V \cap C) = 0{,}24$ (Partie A, question 1.b).

On retrouve bien la loi donnée (et $0{,}19 + 0{,}06 + 0{,}51 + 0{,}24 = 1$) :

x_i	0	70	100	170
$p(X = x_i)$	0,19	0,06	0,51	0,24

b. Espérance :

$$E(X) = 0 \times 0{,}19 + 70 \times 0{,}06 + 100 \times 0{,}51 + 170 \times 0{,}24 = 0 + 4{,}2 + 51 + 40{,}8 = \boxed{96}.$$

Variance, par la formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$:

$$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}19 + 70^2 \times 0{,}06 + 100^2 \times 0{,}51 + 170^2 \times 0{,}24 = 294 + 5\,100 + 6\,936 = 12\,330,$$

$$V(X) = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = \boxed{3\,114}.$$

2) **a.** Avant réduction, la famille paie $X + Y$ euros pour les suppléments et les extras. Une remise de $40\,\%$ revient à multiplier ce montant par $1 - \dfrac{40}{100} = 0{,}6$. Donc $\boxed{Z = 0{,}6\,(X + Y)}$.

b. Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = 0{,}6\,\big(E(X) + E(Y)\big) = 0{,}6 \times (96 + 104) = 0{,}6 \times 200 = \boxed{120}.$$

On a $V(aW) = a^2\,V(W)$, et comme X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$:

$$V(Z) = 0{,}6^2 \times \big(V(X) + V(Y)\big) = 0{,}36 \times (3\,114 + 1\,686) = 0{,}36 \times 4\,800 = \boxed{1\,728}.$$

En moyenne, une famille paie 120 € de suppléments et d'extras après réduction.