Exercice 1

6 points

1) **a.** On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{4u_n - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2}{u_n + 4}.$$

Comme $u_n > 0$, on a $u_n + 4 > 0$ et $-u_n^2 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite (u_n) est donc $\boxed{\text{décroissante}}$ (strictement).
Vérification : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{4}{5}$, $u_2 = \frac{2}{3}$.

b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car $u_n > 0$ pour tout n). D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est $\boxed{\text{convergente}}$.
(Sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant 0$; elle est calculée à la question 4.)

2) **a.** Pour tout entier naturel n (avec $u_{n+1} > 0$) :

$$v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}} = 4 \times \frac{u_n + 4}{4u_n} = \frac{u_n + 4}{u_n} = 1 + \frac{4}{u_n} = v_n + 1.$$

La suite (v_n) est donc arithmétique, de raison $\boxed{r = 1}$ et de premier terme $v_0 = \frac{4}{u_0} = \frac{4}{1}$, soit $\boxed{v_0 = 4}$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + nr$, donc

$$\boxed{v_n = 4 + n}.$$

3) Pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{4}{u_n}$, donc $u_n = \frac{4}{v_n}$ (avec $v_n = n + 4 \neq 0$) :

$$\boxed{u_n = \frac{4}{n+4}}.$$

Vérification : $u_0 = \frac{4}{4} = 1$, $u_1 = \frac{4}{5}$, $u_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$: on retrouve les valeurs de la question 1.

4) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 4) = +\infty$, donc, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{n+4} = 0$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}.$$

C'est cohérent avec la question 1 : une limite positive ou nulle.

Exercice 2

6 points

1) **a.** On pose

$$v(x) = 2x^2 - x - 1 \quad \text{et} \quad u(x) = \sqrt{x}.$$

Alors $u\big(v(x)\big) = \sqrt{2x^2 - x - 1} = f(x)$, donc $f = u \circ v$.

v est une fonction polynôme, définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$; la fonction racine carrée u est définie sur $\boxed{[0\,;+\infty[}$.

b. $f(x)$ existe si et seulement si $v(x)$ appartient à l'ensemble de définition de u, c'est-à-dire si et seulement si $2x^2 - x - 1 \geqslant 0$.

Discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$, donc deux racines :

$$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$$

Le coefficient $a = 2$ est positif : le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $2x^2 - x - 1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right] \cup [1\,;+\infty[$: c'est l'ensemble de définition de f. Les bornes $-\frac{1}{2}$ et 1 sont incluses, car $\sqrt{0} = 0$ existe.

2) On écrit $g = p \times q$ avec, pour $x \neq 0$:

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad p'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad q(x) = \left(x^2-1\right)^5, \quad q'(x) = 10x\left(x^2-1\right)^4$$

(dérivée de w^5 : $5w'w^4$ avec $w(x) = x^2 - 1$, donc $q'(x) = 5 \times 2x \times \left(x^2-1\right)^4$). Alors $g' = p'q + pq'$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{x^2}\left(x^2-1\right)^5 + \frac{1}{x} \times 10x\left(x^2-1\right)^4 \\ &= -\frac{\left(x^2-1\right)^5}{x^2} + 10\left(x^2-1\right)^4 \\ &= \left(x^2-1\right)^4\left[10 - \frac{x^2-1}{x^2}\right] \\ &= \left(x^2-1\right)^4 \times \frac{10x^2 - x^2 + 1}{x^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{g'(x) = \frac{\left(x^2-1\right)^4\left(9x^2+1\right)}{x^2}}.$$

Vérification en $x = 1$: $g'(1) = 0$, et $g(x) = \frac{1}{x}(x-1)^5(x+1)^5$ a bien une tangente horizontale en 1 (racine d'ordre 5).

Exercice 3

8 points

1) On a $\frac{4}{3} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \cos^2(n) \leqslant 1$, donc $-\cos^2(n) \geqslant -1$ et

$$u_n \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right] = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

L'affirmation 1 est fausse.

2) On dérive $f'(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$ comme un produit : $\left(2x^2+1\right)' = 4x$ et $\left(\mathrm{e}^{x^2-1}\right)' = 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1}$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4x\,\mathrm{e}^{x^2-1} + \left(2x^2+1\right) \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1} \\ &= \mathrm{e}^{x^2-1}\left(4x + 4x^3 + 2x\right) \\ &= \mathrm{e}^{x^2-1}\left(4x^3 + 6x\right) \\ &= 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}. \end{aligned}$$

Sur $[0\,;+\infty[$: $2x \geqslant 0$, $2x^2+3 > 0$ (somme d'un carré et d'un nombre positif) et $\mathrm{e}^{x^2-1} > 0$. Donc $f''(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$ (nul seulement en 0).

f est donc convexe sur $[0\,;+\infty[$: l'affirmation 2 est vraie.

3) On lit sur la courbe (C) les variations de g' :

x	-2		-1		1		$2{,}5$
variations de g'	5	↘	1	↗	5	↘	≈ -5

Une fonction est concave sur un intervalle si et seulement si sa dérivée y est décroissante (ou si $g'' \leqslant 0$).

Or g' est croissante sur $[-1\,;\,1]$: sur cet intervalle, $g'' \geqslant 0$ et g est *convexe*. Par exemple $g'(-1) = 1 < g'(1) = 5$. g n'est donc pas concave sur $[-2\,;\,2{,}1]$: elle est concave sur $[-2\,;\,-1]$, convexe sur $[-1\,;\,1]$, puis concave sur $[1\,;\,2{,}5]$ (points d'inflexion d'abscisses -1 et 1).

L'affirmation 3 est fausse.

Remarque : le point F indique que $g'(x) \geqslant 0$ sur $[-2\,;\,2{,}1]$, ce qui renseigne sur le *sens de variation* de g (croissante sur cet intervalle), pas sur sa convexité.