Calculatrice interdite

Exercice 1

6 points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par :

- $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4}$;
- pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{4}{u_n}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1) **a.** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

2) **a.** Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

3) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

6 points

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$.

a. Déterminer les fonctions u et v ainsi que leurs ensembles de définition telles que $f = u \circ v$.

b. Pourquoi la fonction f est-elle définie sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right] \cup [1\,;\,+\infty[$?

2) Calculer la dérivée de la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}\left(x^2 - 1\right)^5$.
En donner une forme factorisée.

Exercice 3

8 points

Dire, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n - \cos^2(n)$.
Affirmation 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1$.

2) Soit f la fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2-1} - 1$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. On admet que, pour tout réel x, $f'(x) = \left(2x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
Affirmation 2 : La fonction f est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

3) g est une fonction définie et deux fois dérivable sur $[-2\,;\,2{,}5]$.
Dans le repère ci-contre, on a tracé la courbe (C) représentative de la fonction g'. Elle passe par le point $F(2{,}1\,;\,0)$.

Affirmation 3 : La fonction g est concave sur $[-2\,;\,2{,}1]$.

