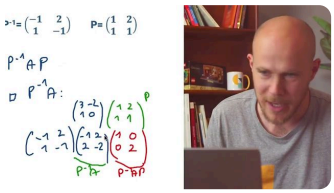
Puissance d'une matrice par diagonalisation

Exercices corrigés PDF · Terminale (maths expertes)



Le cours en vidéo

et les exercices en version interactive, corrigés pas à pas.

Vidéo et exercices

Exercice 1

On donne $A = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculer $D = P^{-1}AP$.

Corrigé interactif

Exercice 2

Avec les matrices de l'exercice 1, on admet que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer D^3.

2) Montrer que $A^3 = PD^3P^{-1}$ et en déduire A^3.

Corrigé interactif

Exercice 3

On donne $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$.

Soit n un entier naturel.

1) Donner D^n.

2) En déduire A^n en fonction de n.

Corrigé interactif

Exercice 4

On donne $M = \begin{pmatrix} 25 & -18 \\ 36 & -26 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer P^2. En déduire P^{-1}.

2) Calculer $D = P^{-1}MP$.

3) En déduire M^n en fonction de D^n et P.

Corrigé interactif

Exercice 5

Corrigé interactif

Deux suites sont définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -2$ et, pour tout entier n : $\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 10v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 6v_n \end{cases}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2) On admet que $X_n = A^n X_0$ et que $A^n = \begin{pmatrix} 5 - 2^{n+2} & 10 \times 2^n - 10 \\ 2 - 2^{n+1} & 5 \times 2^n - 4 \end{pmatrix}$. En déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 6

Corrigé interactif

On donne $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$.

1) Donner D^n.

2) Déterminer la matrice $L = \lim\limits_{n \to +\infty} A^n$.

Puissance d'une matrice diagonalisée : exercices corrigés PDF (Terminale (maths expertes)). Pour calculer la puissance n-ième d'une matrice, on la diagonalise : si $P^{-1}AP = D$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$. Ces exercices corrigés appliquent la méthode aux suites couplées et à la limite d'une puissance de matrice. Cours en vidéo et exercices interactifs corrigés sur galilee.ac.

Puissance d'une matrice par diagonalisation

Corrigé détaillé

Exercice 1

$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$, puis $\boxed{D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$, matrice diagonale.

Exercice 2

1) $\boxed{D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$

2) $A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$ car $P^{-1}P = I_2$. $PD^3 = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} -27 & 70 \\ -14 & 36 \end{pmatrix}}$

Exercice 3

1) $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

2) $A^n = PD^nP^{-1}$ et $PD^n = \begin{pmatrix} 5 & 2^{n+1} \\ 2 & 2^n \end{pmatrix}$, donc $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 5 - 2^{n+2} & 10 \times 2^n - 10 \\ 2 - 2^{n+1} & 5 \times 2^n - 4 \end{pmatrix}}$

Exercice 4

1) $P^2 = I_2$, donc $\boxed{P^{-1} = P}$

2) $PM = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{D = PMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$

3) $M = PDP$, donc $\boxed{M^n = PD^nP}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Exercice 5

1) $\boxed{A = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}}$

2) $u_n = (5 - 2^{n+2}) - 2(10 \times 2^n - 10) = 5 - 4 \times 2^n - 20 \times 2^n + 20$, $\boxed{u_n = 25 - 24 \times 2^n}$

$v_n = (2 - 2^{n+1}) - 2(5 \times 2^n - 4) = 2 - 2 \times 2^n - 10 \times 2^n + 8$, $\boxed{v_n = 10 - 12 \times 2^n}$

Exercice 6

1) $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}}$

2) $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et $D^n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^n = PD^nP^{-1} \to P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$,

$\boxed{L = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}}$