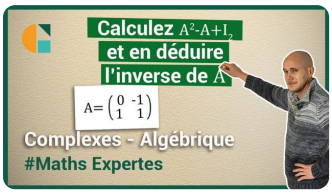
Polynômes de matrice et inversibilité

Exercices corrigés PDF · Terminale (maths expertes)



Le cours en vidéo

et les exercices en version interactive, corrigés pas à pas.

Vidéo et exercices

Exercice 1

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2.

2) Calculer $A^2 + 3A - 2I_2$.

Corrigé interactif

Exercice 2

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -11 & -5 \end{pmatrix}$ et on admet que $A^2 + 3A + I_2 = 0$. Montrer que A est inversible et en déduire A^{-1}.

Corrigé interactif

Exercice 3

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2.

2) Déterminer les réels α et β tels que $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$.

Corrigé interactif

Exercice 4

On donne $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2.

2) Vérifier que $A^2 + 9A = -18I_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Corrigé interactif

Exercice 5

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2.

2) Déterminer le réel k tel que $A^2 = kA$.

3) Calculer $\det(A)$.

4) A est-elle inversible ? Justifier.

Corrigé interactif

Exercice 6

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$, qui vérifie $A^2 + 3A + 2I_2 = 0$.

1) Exprimer A^3 sous la forme $\alpha A + \beta I_2$.

2) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} sous la forme $\lambda A + \mu I_2$.

Corrigé interactif

Exercice 1

1) $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}}$

2) $3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -24 & -15 \end{pmatrix}$, donc $A^2 + 3A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 17-15-2 \end{pmatrix}$, $\boxed{A^2 + 3A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Exercice 2

$A^2 + 3A = -I_2 \iff A(A+3I_2) = -I_2 \iff A \times (-A - 3I_2) = I_2.$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -A - 3I_2$, soit $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}}$

Exercice 3

1) $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 27 & 16 \end{pmatrix}}$

2) Ligne 1, colonne 2 : $-3 + \alpha = 0$, donc $\alpha = 3$. Ligne 1, colonne 1 : $-5 + 2\alpha + \beta = 0$, donc $\beta = -1$. Vérification : $27 - 27 = 0$ et $16 - 15 - 1 = 0$. $\boxed{\alpha = 3,\ \beta = -1}$

Exercice 4

1) $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}}$

2) $9A = \begin{pmatrix} -36 & -9 & -9 \\ -9 & -36 & -9 \\ -9 & -9 & -36 \end{pmatrix}$, donc $A^2 + 9A = \begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = -18I_3$.

Alors $A \times \left(-\frac{1}{18}(A + 9I_3)\right) = I_3$: A est inversible et

$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{18}(A + 9I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18}\frac{1}{18} \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{18}\frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \end{pmatrix}}$

Exercice 5

1) $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}}$

2) $\boxed{A^2 = 4A,\ k = 4}$

3) $\det(A) = 1 \times 3 - 1 \times 3$, $\boxed{\det(A) = 0}$

4) $\det(A) = 0$: $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$. (Sinon, $A^2 = 4A$ donnerait $A = 4I_2$, ce qui est faux.)

Exercice 6

1) $A^2 = -3A - 2I_2$, donc $A^3 = A \times A^2 = -3A^2 - 2A = -3(-3A - 2I_2) - 2A$, $\boxed{A^3 = 7A + 6I_2}$

2) $A(A + 3I_2) = -2I_2$, donc $A \times \left(-\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I_2\right) = I_2$: A est inversible et $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I_2}$

Polynôme de matrice et matrice inverse : exercices corrigés PDF (Terminale (maths expertes)). Une relation du type A² + αA + βI = 0 permet de montrer qu'une matrice est inversible et de calculer son inverse sans formule. Ces exercices corrigés traitent aussi les puissances de A et le cas d'une matrice non inversible. Cours en vidéo et exercices interactifs corrigés sur galilee.ac.