Congruence avec une grande puissance

Exercices corrigés PDF · Terminale



Le cours en vidéo

et les exercices en version interactive, corrigés pas à pas.

Vidéo et exercices

Exercice 1

On veut déterminer le reste de 3^{239} dans la division par 5.

1) Calculer 3^2 et 3^4 modulo 5.

2) Déterminer le reste de 239 modulo 4.

3) En déduire le reste de 3^{239} modulo 5.

Corrigé interactif

Exercice 2

On veut montrer que $5^{279} \equiv 6\ [7]$.

1) Justifier que $5^6 \equiv 1\ [7]$.

2) Déterminer le reste de 279 modulo 6.

3) Conclure.

Corrigé interactif

Exercice 3

Déterminer le reste de la division euclidienne de $545 \times 6^{65} - 339$ par 7.

Corrigé interactif

Exercice 4

Déterminer le reste de la division euclidienne de 8312^{2624} par 13.

Corrigé interactif

Exercice 5 🌶🌶🌶

1) Dresser le tableau des restes de 5^n modulo 13 pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Que constate-t-on ?
2) Déterminer le reste de 1890 modulo 13 et celui de 1239 modulo 4.
3) En déduire que $1890^{1239} - 8$ est divisible par 13.

Corrigé interactif

Exercice 6 🌶🌶🌶🌶

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $31^{4n+1} + 57^{4n-1}$ est divisible par 13.

Corrigé interactif

Congruence et grande puissance, reste : exercices corrigés PDF (Terminale). Comment trouver le reste d'une grande puissance modulo n ? On cherche une petite puissance congrue à 1 (ou à −1), puis on écrit l'exposant par division euclidienne. Ces exercices corrigés démontrent des congruences avec de grosses puissances et en déduisent des divisibilités. Cours en vidéo et exercices interactifs corrigés sur galilee.ac.

Congruence avec une grande puissance

Corrigé détaillé

Exercice 1

1) $3^2 = 9 \equiv -1\ [5]$, donc $\boxed{3^4 \equiv 1\ [5]}$

2) $239 = 4 \times 59 + 3$: reste $\boxed{3}$

3) $3^{239} = \left(3^4\right)^{59} \times 3^3 \equiv 27 \equiv 2\ [5]$: reste $\boxed{2}$

Exercice 2

1) 7 est premier et ne divise pas 5 : d'après le petit théorème de Fermat, $\boxed{5^6 \equiv 1\ [7]}$

2) $279 = 6 \times 46 + 3$: reste $\boxed{3}$

3) $5^{279} = \left(5^6\right)^{46} \times 5^3 \equiv 125 = 7 \times 17 + 6$, donc $\boxed{5^{279} \equiv 6\ [7]}$

Exercice 3

$545 = 7 \times 77 + 6 \equiv 6$; $6 \equiv -1$, donc $6^{65} \equiv (-1)^{65} = -1 \equiv 6$; $339 = 7 \times 48 + 3 \equiv 3\ [7]$.

$545 \times 6^{65} - 339 \equiv 6 \times 6 - 3 = 33 \equiv 5\ [7]$: reste $\boxed{5}$

Exercice 4

$8312 = 13 \times 639 + 5$, donc $8312 \equiv 5\ [13]$.

$5^2 = 25 \equiv -1\ [13]$, donc $5^4 \equiv 1\ [13]$. Comme $2624 = 4 \times 656$:

$8312^{2624} \equiv \left(5^4\right)^{656} \equiv 1\ [13]$: reste $\boxed{1}$

Exercice 5

1)

n	0	1	2	3	4
5^n **mod** 13	1	5	12	8	1

$5^4 \equiv 1\ [13]$: $\boxed{\text{restes périodiques de période } 4}$

2) $1890 = 13 \times 145 + 5 \equiv 5\ [13]$ et $1239 = 4 \times 309 + 3 \equiv 3\ [4]$.

3) $1890^{1239} \equiv 5^{1239} = \left(5^4\right)^{309} \times 5^3 \equiv 8\ [13]$, donc $\boxed{1890^{1239} - 8 \equiv 0\ [13]}$

Exercice 6

$31 = 2 \times 13 + 5 \equiv 5$ et $57 = 4 \times 13 + 5 \equiv 5\ [13]$. De plus $5^2 \equiv -1$, donc $5^4 \equiv 1\ [13]$.

$5^{4n+1} = \left(5^4\right)^n \times 5 \equiv 5$ et $5^{4n-1} = \left(5^4\right)^{n-1} \times 5^3 \equiv 125 \equiv 8\ [13]$.

Donc $31^{4n+1} + 57^{4n-1} \equiv 5 + 8 = 13 \equiv 0\ [13]$: $\boxed{\text{divisible par 13 pour tout } n \geqslant 1}$