Rédiger un raisonnement par récurrence

Exercices corrigés PDF · Terminale



Le cours en vidéo

et les exercices en version interactive, corrigés pas à pas.

Vidéo et exercices

Exercice 1

85 % de réussite

Combien d'étapes comporte un raisonnement par récurrence ? Nommer chacune d'elles.

Corrigé interactif

Exercice 2

99 % de réussite

Dans quel ordre rédige-t-on les étapes d'un raisonnement par récurrence ? Préciser en une phrase le rôle de chacune.

Corrigé interactif

Exercice 3

52 % de réussite

On souhaite démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $2^n \geq n$.

1) Quel est le premier rang à vérifier ? Rédiger l'initialisation.

2) Rédiger l'hérédité. On pourra utiliser que $n \geq 1$ implique $2n \geq n + 1$.

3) Conclure.

Corrigé interactif

Exercice 4

80 % de réussite

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) Pour démontrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire précisément ce que l'on suppose et ce que l'on doit démontrer dans l'hérédité.

2) Rédiger la démonstration complète.

Corrigé interactif

Exercice 5

55 % de réussite

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1) Pour démontrer par récurrence que $u_n = 3 - 2^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire l'hypothèse de récurrence et ce que l'on doit démontrer dans l'hérédité.

2) Rédiger la démonstration complète.

Corrigé interactif

Exercice 6

65 % de réussite

Soit (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n - 1$, en soignant la conclusion.

2) Un élève conclut : « La proposition est vraie au rang 1, donc elle est vraie pour tout $n \geq 1$. » Pourquoi cette conclusion est-elle incorrecte ?

Corrigé interactif

Exercice 1

Un raisonnement par récurrence comporte $\boxed{3}$ étapes : l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

Exercice 2

1) Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au premier rang n_0.

2) Hérédité : on suppose la propriété vraie à un rang $n \geq n_0$ et on démontre qu'elle est vraie au rang $n+1$.

3) Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Ordre : $\boxed{\text{initialisation, hérédité, conclusion}}$.

Exercice 3

Notons P_n : « $2^n \geq n$ ».

1) Le premier rang est $n = 1$ (et non 0). $2^1 = 2 \geq 1$, donc P_1 est vraie.

2) Soit $n \geq 1$ tel que $2^n \geq n$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n$. Or $n \geq 1$ donne $2n = n + n \geq n + 1$. Donc $2^{n+1} \geq n+1$: P_{n+1} est vraie.

3) P_1 est vraie et la propriété est héréditaire, donc $\boxed{\forall n \geq 1,\ 2^n \geq n}$.

Exercice 4

1) On suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et on démontre que $u_{n+1} > 0$.

2) Initialisation : $u_0 = 1 > 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $2u_n > 0$, donc $u_{n+1} = 2u_n + 1 > 1 > 0$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.

Exercice 5

1) On suppose que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^{n+1}$ et on démontre que $u_{n+1} = 3 - 2^{n+2}$.

2) Initialisation : $3 - 2^1 = 1 = u_0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 3 - 2^{n+1}$. Alors

$$u_{n+1} = 2\left(3 - 2^{n+1}\right) - 3 = 6 - 2^{n+2} - 3 = 3 - 2^{n+2}.$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^{n+1}}$.

Exercice 6

1) Initialisation : $2^1 - 1 = 1 = u_1$.
Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $u_n = 2^n - 1$. Alors $u_{n+1} = 2\left(2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1} - 1$.
Conclusion : la proposition est vraie au rang 1 et héréditaire, donc $\boxed{\forall n \geq 1,\ u_n = 2^n - 1}$.

2) Elle oublie l'hérédité : la vérité au rang 1 seule ne prouve rien pour les rangs suivants.

Raisonnement par récurrence : exercices corrigés PDF (Terminale). Ces exercices de raisonnement par récurrence en terminale entraînent à la rédaction : initialisation, hérédité, conclusion. Ils montrent comment faire une démonstration par récurrence sur une suite ou une inégalité, avec un corrigé détaillé en PDF. Cours en vidéo et exercices interactifs corrigés sur galilee.ac.