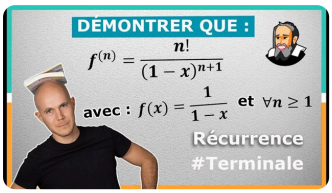
Récurrence et dérivée n-ième

Exercices corrigés PDF · Terminale



Le cours en vidéo

et les exercices en version interactive, corrigés pas à pas.

Vidéo et exercices

Exercice 1

Soit f définie sur $]-\infty\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Vidéo et exercices

Exercice 2

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$.

1) Calculer $g'(x)$, $g''(x)$ et $g'''(x)$. Conjecturer l'expression de $g^{(n)}(x)$.

2) Démontrer cette conjecture par récurrence.

3) En déduire $g^{(10)}(0)$.

Vidéo et exercices

Exercice 3

Soit h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \ln(x)$.

1) Calculer $h'(x)$, $h''(x)$, $h'''(x)$ et $h^{(4)}(x)$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $h^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}$.

3) En déduire $h^{(5)}(1)$.

Vidéo et exercices

Récurrence et dérivée n-ième

Corrigé détaillé

Exercice 1

1) $f(x) = (1-x)^{-1}$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

2) Soit $P(n)$: « $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ».

Initialisation : $f^{(0)}(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{0!}{(1-x)^1}$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : si $P(n)$ est vraie, $f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}$, donc

$f^{(n+1)}(x) = n! \times (-(n+1)) \times (-1)(1-x)^{-(n+2)} = \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

1) $g'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$, $g''(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$, $g'''(x) = (x+3)\mathrm{e}^x$. Conjecture : $g^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$.

2) $P(n)$: « $g^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$ ».

Initialisation : $g^{(0)}(x) = x\mathrm{e}^x = (x+0)\mathrm{e}^x$.

Hérédité : si $P(n)$ est vraie, $g^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^x + (x+n)\mathrm{e}^x = (x+n+1)\mathrm{e}^x$.

Conclusion : $\boxed{g^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) $g^{(10)}(0) = (0+10)\mathrm{e}^0 = \boxed{10}$.

Exercice 3

1) $h'(x) = \dfrac{1}{x}$, $h''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $h'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $h^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$.

2) $P(n)$: « $h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$ ».

Initialisation : $(-1)^0\,0!\,x^{-1} = \dfrac{1}{x} = h'(x)$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : si $P(n)$ est vraie, $h^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \times (-n)x^{-n-1} = \dfrac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{h^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}}$ pour tout $n \geq 1$.

3) $h^{(5)}(1) = (-1)^4 \times 4! = \boxed{24}$.

Dérivée n-ième et récurrence : exercices corrigés PDF (Terminale). Ces exercices corrigés montrent comment calculer une dérivée n-ième et la démontrer par récurrence. On y traite la dérivée n-ième de 1/(1-x), de x e^x et de ln, en Terminale. Cours en vidéo et exercices interactifs corrigés sur galilee.ac.