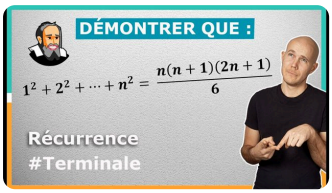
Démontrer une égalité par récurrence

Exercices corrigés PDF · Terminale



Le cours en vidéo

et les exercices en version interactive, corrigés pas à pas.

Vidéo et exercices

Exercice 1

29 % de réussite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Corrigé interactif

Exercice 2

31 % de réussite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

1) Développer $(n+2)(2n+3)$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Corrigé interactif

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

1) Calculer C_1, C_2, C_3 et comparer avec $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour $n = 1, 2, 3$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3) En déduire que $C_n = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Vidéo et exercices

Démontrer une égalité par récurrence : exercices corrigés PDF (Terminale). Ces exercices montrent comment démontrer une égalité par récurrence avec une rédaction complète : initialisation, hérédité, conclusion. Ils servent d'exemples de démonstration par récurrence sur des sommes classiques en Terminale. Cours en vidéo et exercices interactifs corrigés sur galilee.ac.

Démontrer une égalité par récurrence

Corrigé détaillé

Exercice 1

1) Soit P_n : « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation. $S_0 = 0$ et $\dfrac{0 \times 1}{2} = 0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité. Supposons P_n vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. P_0 est vraie et la propriété est héréditaire, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 2

1) $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = \boxed{2n^2 + 7n + 6}$.

2) Soit P_n : « $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Initialisation. $S_1 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$, donc P_1 est vraie.

Hérédité. Supposons P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$. On veut $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

D'après 1), $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$: P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

Exercice 3

1) $C_1 = 1, C_2 = 9, C_3 = 36$; et $\left(\dfrac{1 \times 2}{2}\right)^2 = 1, \left(\dfrac{2 \times 3}{2}\right)^2 = 9, \left(\dfrac{3 \times 4}{2}\right)^2 = 36$: $\boxed{\text{les valeurs coïncident}}$.

2) Soit P_n : « $C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

Initialisation. $C_1 = 1 = \dfrac{1 \times 4}{4}$: P_1 est vraie.

Hérédité. Supposons P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$.

$$C_{n+1} = C_n + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

3) D'après l'exercice 1, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, donc $(1 + 2 + \cdots + n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, d'où $\boxed{C_n = (1 + 2 + \cdots + n)^2}$.