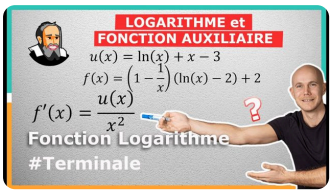
Logarithme et fonction auxiliaire

Exercices corrigés PDF · Terminale



Le cours en vidéo

et les exercices en version interactive, corrigés pas à pas.

Vidéo et exercices

Exercice 1

53 % de réussite

Corrigé interactif

Partie I. Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln x + 2x + 2$.

1) Calculer $u'(x)$.

2) En déduire le sens de variation de u sur $]0\,;+\infty[$.

3) On admet que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution a sur $]0\,;+\infty[$. Dresser le tableau de signes de $u(x)$.

Partie II. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln x + 3) + 3$.

1) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$.

2) En déduire le sens de variation de f.

Exercice 2

Vidéo et exercices

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2) En déduire que g admet un minimum égal à $\dfrac{3 + \ln 2}{2}$, puis que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

3) Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le sens de variation de f.

Exercice 3 🌶🌶🌶🌶

Vidéo et exercices

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1) Étudier le sens de variation de g, calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - x + 2$.

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. Étudier le sens de variation de f et donner son maximum.

3) En déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x^2 - x$.

Exercice 1

Partie I.

1) $\boxed{u'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{2x+1}{x}}$.

2) Pour $x > 0$: $2x + 1 > 0$ et $x > 0$, donc $u'(x) > 0$: $\boxed{u \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$.

3) u est strictement croissante et $u(a) = 0$, donc :

x	0		a		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie II.

1) $\left(2 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ et $(\ln x + 3)' = \frac{1}{x}$, donc

$f'(x) = \frac{\ln x + 3}{x^2} + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{\ln x + 3 + 2x - 1}{x^2} = \frac{\ln x + 2x + 2}{x^2}$,

soit $\boxed{f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}}$.

2) Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $u(x)$:

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0\,;a] \text{ et strictement croissante sur } [a\,;+\infty[}$.

Exercice 2

1) $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$. Pour $x > 0$, $g'(x)$ a le signe de $2x^2 - 1$:

$\boxed{g'(x) < 0 \text{ sur } \left]0\,;\frac{2}{2}\right[, g'(x) > 0 \text{ sur } \left]\frac{2}{2}\,;+\infty\right[}$.

2) g est décroissante puis croissante : son minimum est $g\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\frac{2}{2}$. Or

$\ln\frac{2}{2} = \ln\frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{2}$, donc le minimum vaut $\boxed{\frac{3 + \ln 2}{2} > 0}$, d'où $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

3) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, donc $f'(x) = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$. Comme $g(x) > 0$: $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$.

Exercice 3

1) $g'(x) = -2x - \dfrac{1}{x} < 0$ pour $x > 0$: g est strictement décroissante. $g(1) = 1 - 1 - 0 = 0$. D'où :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

$\boxed{g(x) > 0 \text{ sur }]0\,;1[\text{ et } g(x) < 0 \text{ sur }]1\,;+\infty[}$.

2) a. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \dfrac{1 - \ln x - x^2}{x^2}$, soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$.

b. $f'(x)$ a le signe de $g(x)$: f est croissante sur $]0\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$. $f(1) = 0 - 1 + 2 = 1$.
$\boxed{\text{Maximum de } f : f(1) = 1}$.

3) Pour tout $x > 0$, $f(x) \leq 1$, soit $\dfrac{\ln x}{x} \leq x - 1$; en multipliant par $x > 0$: $\boxed{\ln x \leq x^2 - x}$.

Logarithme et fonction auxiliaire : exercices corrigés PDF (Terminale). Dans ces exercices de logarithme corrigés, l'étude d'une fonction auxiliaire donne le signe de la dérivée d'une fonction contenant ln. C'est une méthode classique des exercices de fonction ln en terminale et au bac. Cours en vidéo et exercices interactifs corrigés sur galilee.ac.