Résoudre un problème d'optimisation d'aire

Exercices corrigés PDF · Première



Le cours en vidéo

et les exercices en version interactive, corrigés pas à pas.

Vidéo et exercices

Exercice 1

49 % de réussite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$, de courbe $\mathcal{C}$. Pour $x \geq 0$, on considère les points $M(-x\,;0)$, $N(x\,;0)$, $P(x\,;f(x))$ et $Q(-x\,;f(x))$: $MNPQ$ est un rectangle inscrit sous $\mathcal{C}$, au-dessus de l'axe des abscisses.

1) Exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle $MNPQ$ en fonction de x.

2) À quel intervalle appartient x ?

3) Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ?

Corrigé interactif

Exercice 2

12 % de réussite

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 4$ et $AD = 2$. Pour un réel x, on place E sur $[AD]$ tel que $AE = x$ et F sur $[AB]$ tel que $BF = x$.

1) À quel intervalle appartient x ?

2) Montrer que l'aire du triangle EFC est $A(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 4$.

3) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Donner l'aire minimale.

Corrigé interactif

Exercice 3

Un jardinier dispose de 40 m de grillage pour clôturer un potager rectangulaire adossé à un mur : le mur forme un côté, le grillage les trois autres. On note x la longueur, en mètres, des deux côtés perpendiculaires au mur.

1) Exprimer en fonction de x la longueur du côté parallèle au mur, puis l'aire $A(x)$ du potager.

2) À quel intervalle appartient x ?

3) Déterminer les dimensions du potager d'aire maximale et cette aire.

Vidéo et exercices

Résoudre un problème d'optimisation d'aire

Corrigé détaillé

Exercice 1

1) $MN = 2x$ et $NP = f(x) = 4 - x^2$, donc $A(x) = 2x(4 - x^2)$. $\boxed{A(x) = 8x - 2x^3}$

2) $x \geq 0$ (distance) et P doit être au-dessus de l'axe : $4 - x^2 \geq 0$, soit $x \leq 2$. $\boxed{x \in [0\,;2]}$

3) $A'(x) = 8 - 6x^2$. $A'(x) = 0 \iff x^2 = \dfrac{4}{3} \iff x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (car $x \geq 0$).

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2
$A'(x)$		$+$	0	$-$	

A est croissante puis décroissante : son maximum est atteint en $\boxed{x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$; il vaut $A\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{32\sqrt{3}}{9}$.

Exercice 2

1) $0 \leq AE \leq AD$ et $0 \leq BF \leq AB$ donnent $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq x \leq 4$. $\boxed{x \in [0\,;2]}$

2) On retire du rectangle trois triangles rectangles :

$AEF : \dfrac{AE \times AF}{2} = \dfrac{x(4-x)}{2} = 2x - \dfrac{x^2}{2}$; $FBC : \dfrac{x \times 2}{2} = x$; $EDC : \dfrac{(2-x) \times 4}{2} = 4 - 2x$.

$A(x) = 8 - \left(2x - \dfrac{x^2}{2} + x + 4 - 2x\right) = 8 - 4 - x + \dfrac{x^2}{2}$, donc $\boxed{A(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + 4}$

3) $A'(x) = x - 1$: négative sur $[0\,;1]$, positive sur $[1\,;2]$. A est décroissante puis croissante, minimale en $x = 1$, avec $A(1) = \dfrac{1}{2} - 1 + 4 = \dfrac{7}{2}$. $\boxed{x = 1,\ A_{\min} = \dfrac{7}{2}}$

Exercice 3

1) Côté parallèle au mur : $40 - 2x$. $\boxed{A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2}$

2) $x > 0$ et $40 - 2x > 0$. $\boxed{x \in]0\,;20[}$

3) $A'(x) = 40 - 4x$, positive sur $]0\,;10]$, négative sur $[10\,;20[$: maximum en $x = 10$. Côté parallèle : $40 - 20 = 20$ m ; $A(10) = 10 \times 20 = 200$. $\boxed{10\text{ m} \times 20\text{ m},\ A_{\max} = 200\text{ m}^2}$

Problèmes d'optimisation d'aire : exercices corrigés PDF (Première). Ces problèmes d'optimisation corrigés de première suivent toujours la même démarche : exprimer l'aire en fonction de x, préciser l'intervalle où varie x, puis étudier la fonction obtenue avec la dérivée ou la forme du second degré. Un PDF d'exercices d'optimisation d'aire pour préparer un contrôle. Cours en vidéo et exercices interactifs corrigés sur galilee.ac.